

## Aufgaben 10      Exponentialfunktion und -gleichungen Nachschüssige Rente, Vorschüssige Rente

### Lernziele

- den Anfangs- und den Endwert einer Rente berechnen können, falls konstante Zahlungen am Anfang oder am Ende jeder Zinsperiode getätigt werden.
- ausgewählte Rentenprobleme bearbeiten können.

### Aufgaben

#### Nachschüssige Rente

10.1 Bestimmen Sie den Endwert einer Rente, bei welcher 5 Jahre lang am Ende jedes Jahres 1300 CHF eingezahlt werden, wobei jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszinssatz von 6% verzinst wird.

10.2 Die Formel

$$R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wird verwendet, um den Endwert  $R_n$  einer nachschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach  $r$  und  $n$ .

10.3 Angenommen, 2500 CHF werden am Ende jedes Quartals auf ein Konto eingezahlt, wobei vierteljährlich mit Zinseszins und einem nominellen Jahreszinssatz von 5% verzinst wird. Nach wievielen Quartalen liegen auf dem Konto 80'000 CHF?

10.4 Nehmen Sie an, dass Geld auf einem Konto jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszins von 1.5% verzinst wird. Man möchte nach 10 Jahren 20'000 CHF haben.

- Welcher Betrag muss am Ende jedes Jahres eingezahlt werden?
- Welchen Betrag müsste man zu Beginn einzahlen, falls während der ganzen Zeit keine weiteren Zahlungen mehr getätigt würden?
- Vergleichen Sie die Ergebnisse in a) und b). Erklären Sie, warum die Zahlung in b) kleiner ist als die Summe aller 10 Zahlungen in a).

10.5 Zwei Zwillinge sind 23 Jahre alt und haben verschiedene Anlagestrategien.

Nehmen Sie an, dass der Zwilling 1 10 Jahre lang (bis er 33 Jahre alt ist) am Ende jedes Jahres 2000 CHF auf ein Konto einzahlt, wobei jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszinssatz von 8% verzinst wird. Der Zwilling 2 hingegen wartet mit seiner Investition, bis er 40 Jahre alt ist.

Wieviel muss der Zwilling 2 in den darauffolgenden 25 Jahren am Ende jedes Jahres auf ein Konto einzahlen, wobei ebenfalls jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszinssatz von 8% verzinst wird, so dass er am Ende dieser 25 Jahre (wenn beide 65 Jahre alt sind) den gleichen Betrag hat wie der Zwilling 1?

Hinweise:

- Zeichnen Sie ein Diagramm, welches die Anlagestrategien der beiden Zwillinge im zeitlichen Verlauf darstellt.
- Das Geld, welches der Zwilling 1 eingezahlt hat, bis er 33 Jahre alt ist, trägt Zins, bis er 65 Jahre alt ist.

10.6 (siehe nächste Seite)

10.6 Bestimmen Sie den Anfangswert einer Rente, bei welcher 8 Jahre lang am Ende jedes Halbjahres 6000 CHF ausbezahlt werden, falls das Geld halbjährlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 8% verzinst wird.

10.7 Die Formel

$$R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

wird verwendet, um den Anfangswert  $R_0$  einer nachschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach  $r$  und  $n$ .

10.8 Wieviel Geld kann 10 Jahre lang am Ende jedes Quartals abgehoben werden, wenn der Anfangswert der Rente 135'000 CHF beträgt und das Geld vierteljährlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 6.4% verzinst wird?

10.9 Ein Konto, welches als zusätzliche Altersvorsorge dienen soll, enthält 242'000 CHF. Nehmen Sie an, dass 200'000 CHF für eine Rente verwendet werden sollen, welche vierteljährlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 6% verzinst wird und bei welcher am Ende jedes Quartals 4500 CHF abgehoben werden sollen.

Wie lange geht es, bis der Kontostand 0 CHF ist?

#### *Vorschüssige Rente*

10.10 Die beiden Formeln

$$R_n = rq \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{und} \quad R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)}$$

werden verwendet, um den Endwert  $R_n$  oder den Anfangswert  $R_0$  einer vorschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie beide Formeln nach  $r$  und  $n$ .

10.11 Bestimmen Sie den Endwert einer vorschüssigen Rente, bei welcher 2.5 Jahre lang vierteljährlich 100 CHF eingezahlt werden und das Geld vierteljährlich mit Zinseszins bei einem Jahreszinssatz von 12% verzinst wird.

10.12 Wieviel muss zu Beginn jedes Jahres auf ein Konto eingezahlt werden, welches jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszinssatz von 8% verzinst wird, damit das Konto nach 5 Jahren 24'000 CHF enthält?

10.13 Angenommen, ein Konto, welches vierteljährlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 5% verzinst wird, enthalte am Anfang 80'000 CHF, und es werden zu Beginn jedes Quartals 2500 CHF abgehoben. Nach wievielen Quartalen wird das Konto 0 CHF enthalten?

10.14 Welche Geldmenge muss jetzt zur Seite gelegt werden, um in den nächsten 12 Jahren Auszahlungen von 50'000 CHF zu Jahresbeginn zu generieren, wenn das Geld jährlich mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 5.92% verzinst wird?

10.15 Was für eine Rate generiert ein einmaliger, am Jahresende ausbezahlter Bonus von 25'000 CHF am Anfang jedes Monats des folgenden Jahres, wenn das Geld monatlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszins von 6.48% verzinst wird?

*Vermischte Aufgaben*

- 10.16 Herr Müller plant, 300 CHF am Ende jedes Monats auf ein Konto einzuzahlen, welches monatlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 9% verzinst wird. Nach wievielen Monaten wird das Konto 50'000 CHF wert sein?
- 10.17 Ein Grosselternpaar plant, am Geburtstag ihres Grosskindes ein Konto zu eröffnen und jeden Monat einen Betrag einzuzahlen, bis das Grosskind 18 Jahre alt ist. Wieviel müssen die Grosseltern zu Beginn jedes Monats einzahlen, damit der Kontostand am Ende der 18 Jahre 180'000 CHF beträgt, wenn die Anlage monatlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 12% verzinst wird?
- 10.18 Eine Versicherung im Wert von 750'000 CHF muss das Einkommen einer Person für die nächsten 40 Jahre ersetzen. Welches Einkommen generiert diese Summe am Ende jedes Monats, wenn das Geld als Rente investiert wird, welche monatlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 8.4% verzinst wird?
- 10.19 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) Bei einer nachschüssigen Rente ...
- ... wird Geld immer einmal pro Jahr eingezahlt oder ausbezahlt.
  - ... wird Geld am Anfang jeder Zinsperiode eingezahlt oder ausbezahlt.
  - ... wächst oder fällt der Wert der Rente exponentiell.
  - ... werden keine Zahlungen während der Zinsperiode getätigt.
- b) Bei einer nachschüssigen Rente erfolgt die Verzinsung monatlich. Wenn jeden Monat 100 CHF eingezahlt werden, kann gefolgert werden, dass der Wert der Rente nach einem Jahr ...
- ... 1200 CHF ist.
  - ... 1320 CHF ist, falls der nominelle Jahreszinssatz 10% beträgt.
  - ... weniger als 1320 CHF ist, falls der nominelle Jahreszinssatz 10% beträgt.
  - ... weniger als 1200 CHF ist.
- c) Angenommen, ein Anfangskapital beträgt 1000 CHF. Bei einer vorschüssigen Rente (Jahreszinssatz = 1%, jährliche Verzinsung mit Zinseszins) soll 10-mal zu Beginn jedes Jahres ein konstanter Betrag ausbezahlt werden. Daraus folgt, dass die jährlichen Rückzüge ...
- ... nicht höher als 100 CHF sein dürfen.
  - ... genau 100 CHF sein müssen.
  - ... doppelt so hoch sein könnten, falls der Jahreszinssatz 2% wäre.
  - ... höher sein könnten bei einer nachschüssigen Rente.

## Lösungen

10.1  $R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 1300$  CHF,  $q = 1 + 6\% = 1.06$ ,  $n = 5$   
 $\Rightarrow R_5 = 7328.22$  CHF (gerundet)

10.2 siehe [Formelsammlung](#)

10.3  $n = \frac{\lg\left(\frac{R_n(q-1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_n = 80'000$  CHF,  $r = 2500$  CHF,  $q = 1 + \frac{5\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 27.08... \rightarrow 28$  Quartale = 7 Jahre

10.4 a) Nachschüssige Rente  
 $r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = 20'000$  CHF,  $q = 1 + 1.5\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow r = 1868.70$  CHF (aufgerundet)

b) Zinseszins  
 $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$  mit  $K_n = 20'000$  CHF,  $q = 1 + 1.5\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow K_0 = 17'233.35$  CHF (aufgerundet)

c) Die Zahlung in b) trägt während der ganzen 10 Jahre Zins.  
Die einzelnen Zahlungen in a) tragen nicht während der ganzen 10 Jahren Zins.

10.5 Zwilling 1: Nachschüssige Rente (Alter 23 bis 33)  
 $R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 2000$  CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow R_{10} = \text{Kapital im Alter 33} = 28'973.12$  CHF (gerundet)  
Zinseszins (Alter 33 bis 65)  
 $K_n = K_0 q^n$  mit  $K_0 = R_{10}$ ,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 32$   
 $\Rightarrow K_{32} = \text{Kapital im Alter 65} = 340'059.97$  CHF (gerundet)  
( $K_{32} = \text{Kapital Zwilling 2 im Alter 65}$ )

Zwilling 2: Nachschüssige Rente (Alter 40 bis 65)  
 $r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = K_{32}$  (Zwilling 1) =  $340'059.97$  CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 25$   
 $\Rightarrow r = 4651.61$  CHF (gerundet)

10.6  $R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$  mit  $r = 6000$  CHF,  $q = 1 + \frac{8\%}{2}$ ,  $n = 8 \cdot 2 = 16$   
 $\Rightarrow R_0 = 69'913.77$  CHF (gerundet)

10.7 siehe [Formelsammlung](#)

10.8  $r = \frac{R_0 q^n (q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 135'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{6.4\%}{4}$ ,  $n = 10 \cdot 4 = 40$   
 $\Rightarrow r = 4595.46$  CHF (gerundet)

10.9  $n = \frac{\lg\left(\frac{r}{r - R_0(q-1)}\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_0 = 200'000$  CHF,  $r = 4500$  CHF,  $q = 1 + \frac{6\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 73.78... \rightarrow 73$  Quartale (weniger als 4500 CHF am Ende des 74. Quartals)

10.10 siehe [Formelsammlung](#)

10.11  $R_n = rq \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 100$  CHF,  $q = 1 + \frac{12\%}{4}$ ,  $n = 2.5 \cdot 4 = 10$   
 $\Rightarrow R_{10} = 1180.78$  CHF (gerundet)

10.12  $r = \frac{R_n(q-1)}{q(q^n-1)}$  mit  $R_n = 24'000$  CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 5$   
 $\Rightarrow r = 3787.92$  CHF (gerundet)

10.13  $n = \frac{\lg\left(\frac{rq}{rq - R_0(q-1)}\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_0 = 80'000$  CHF,  $r = 2500$  CHF,  $q = 1 + \frac{5\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 40.46... \rightarrow 40$  Quartale (weniger als 2500 CHF am Anfang des 41. Quartals)

10.14  $R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$  mit  $r = 50'000$  CHF,  $q = 1 + 5.92\%$ ,  $n = 12$   
 $\Rightarrow R_0 = 445'962.23$  CHF (gerundet)

10.15  $r = \frac{R_0 q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 25'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{6.48\%}{12}$ ,  $n = 1 \cdot 12 = 12$   
 $\Rightarrow r = 2145.59$  CHF (gerundet)

10.16 Nachschüssige Rente

$n = \frac{\lg\left(\frac{R_n(q-1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_n = 50'000$  CHF,  $r = 300$  CHF,  $q = 1 + \frac{9\%}{12}$   
 $\Rightarrow n = 108.52... \rightarrow 109$  Monate (= 9 Jahre 1 Monat)

10.17 Vorschüssige Rente

$r = \frac{R_n(q-1)}{q(q^n-1)}$  mit  $R_n = 180'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{12\%}{12}$ ,  $n = 18 \cdot 12 = 216$   
 $\Rightarrow r = 235.16$  CHF (gerundet)

10.18 Nachschüssige Rente, Einkommen = monatliche Zahlung r

$r = \frac{R_0 q^n (q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 750'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{8.4\%}{12}$ ,  $n = 40 \cdot 12 = 480$   
 $\Rightarrow r = 5441.23$  CHF (gerundet)

- 10.19 a) 4. Aussage  
b) 3. Aussage  
c) 4. Aussage