

Aufgaben 9 Exponentialfunktion und -gleichungen Exponentialgleichungen, Logarithmus, Zinseszins

Lernziele

- einfache Logarithmen ohne Taschenrechner bestimmen können.
- einfachere Exponentialgleichungen ohne Taschenrechner lösen können.
- einen Zehnerlogarithmus und einen natürlichen Logarithmus mit einem Taschenrechner berechnen können.
- eine Logarithmuseigenschaft anwenden können, um einfache Exponentialgleichungen lösen zu können.
- ausgewählte Zinseszinsprobleme mit Hilfe von Logarithmen bearbeiten können.

Aufgaben

Exponentialgleichungen, Logarithmus

9.1 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen **ohne** Taschenrechner, d.h. finden Sie die Lösungen durch Probieren.

- a) $2^x = 16$ b) $4^x = 64$ c) $5^x = 1$
d) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{27}{8}$ e) $10^x = 1'000'000$ f) $10^x = 10$

9.2 Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen **ohne** Taschenrechner.

- a) $\log_3(27)$ b) $\log_4(16)$ c) $\log_2(128)$
d) $\log_{10}(1000)$ e) $\log_{10}(1)$

9.3 Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen **mit** Ihrem Taschenrechner.

- a) $\lg(1.1)$ b) $\ln(1.1)$ c) $\lg(9)$
d) $\ln(9)$ e) $\lg(2345.67)$ f) $\ln(2345.67)$

9.4 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

- a) $10^x = 21$ b) $10^x = 256.78$ c) $10^x = 1'234'567$

9.5 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

- a) $3^x = 99$ b) $1.01^x = 1.5$ c) $3^{x+4} = 5$
d) $5^{2x-1} = 12$ e) $1 - e^{5x} = 0.3$

Zinseszins

9.6 Ein Anfangskapital K_0 wird bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz i angelegt. K_n ist das Kapital nach n Jahren. Bestimmen Sie n .

- a) $K_0 = 1000$ CHF $i = 1.00\%$ $K_n = 1220$ CHF (gerundet)
b) $K_0 = 100'000$ CHF $i = 2.25\%$ $K_n = 243'519$ CHF (gerundet)

9.7 Wie lange müssten 10'000 CHF bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 2.5% angelegt werden, um den Wert von 12'000 CHF zu erreichen?

- 9.8 Wie lang müsste ein beliebiges Anfangskapital bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 1.25% angelegt werden, um seinen Wert zu verdoppeln?
- 9.9 Ein Anfangskapital von 10'000.00 CHF wird bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem unbekanntem Jahreszinssatz investiert. Nach 10 Jahren beträgt das Kapital 11'894.40 CHF. Nach wievielen Jahren (seit Beginn der Investition) wird das Kapital 15'000.00 CHF betragen?
- 9.10 Wie lange (auf Jahre gerundet) müssten 1000 CHF bei täglicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 2.5% angelegt werden, um einen Zins von insgesamt 250 CHF zu erzielen?
- 9.11 Ein Paar benötigt 150'000 CHF für eine erste Anzahlung an ihr Eigenheim. Angenommen, sie investieren die 100'000 CHF, die sie jetzt haben, bei vierteljährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 8%.
Wie lange dauert es, bis das Geld auf 150'000 CHF angewachsen ist?
- 9.12 Der Rückgang der Erträge für eine Dienstleistung ist gegeben durch
$$E = 50'000 e^{-0.8x} \text{ CHF}$$

E sind die monatlichen Erträge im x-ten Monat nach einer Promotionskampagne.
- a) Wie gross sind die Erträge im vierten Monat nach der Kampagne?
- b) Im wievielten Monat nach der Kampagne werden die Erträge unter 1000 CHF fallen, falls keine neue Kampagne gestartet wird?
- 9.13 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) $\log_a(x)$ ist die Antwort auf die Frage ...
- ... "a hoch wieviel ist x?"
- ... "x hoch wieviel ist a?"
- ... "10 hoch wieviel ist x?"
- ... "10 hoch wieviel ist a?"
- b) Falls $p = 2^q$, dann ...
- ... $q = \left(\frac{1}{2}\right)^p$
- ... $q = \frac{p}{2}$
- ... $q = \log_2(p)$
- ... $q = \ln(2)$
- c) $\ln(e) = \dots$
- ... $\log_e(1)$
- ... $\log_{10}(e)$
- ... 0
- ... 1

Lösungen

- 9.1 a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = 0$
d) $x = 3$ e) $x = 6$ f) $x = 1$

- 9.2 a) 3
Hinweis:
- Der Ausdruck $\log_3(27)$ ist die Antwort auf die Frage "3 hoch wieviel ist gleich 27?"
b) 2
c) 7
d) 3
e) 0

- 9.3 a) 0.041... b) 0.095... c) 0.954...
d) 2.197... e) 3.370... f) 7.760...

- 9.4 a) $x = \log_{10}(21) = \lg(21) = 1.322...$
b) $x = \log_{10}(256.78) = \lg(256.78) = 2.409...$
c) $x = \log_{10}(1'234'567) = \lg(1'234'567) = 6.091...$

- 9.5 a) $x = 4.182...$
b) $x = 40.748...$
c) $x = -2.535...$
Hinweis:
- Lösen Sie die Gleichung zuerst nach $x+4$.
d) $x = 1.271...$
e) $x = -0.071...$
Hinweise:
- Lösen Sie zuerst nach e^{5x} .
- Lösen Sie dann nach $5x$.

- 9.6 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(1+i)}$
a) $n = 20$
b) $n = 40$

- 9.7 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(1+i)}$ mit $K_0 = 10'000$ CHF, $K_n = 12'000$ CHF, $i = 2.5\%$
 $\Rightarrow n = 7.38... \rightarrow 8$ Jahre

- 9.8 (siehe nächste Seite)

9.8 $K_n = K_0 (1 + i)^n$ mit $i = 1.25\%$
 $K_n = 2 \cdot K_0$

 $\Rightarrow n = \frac{\lg(2)}{\lg(1 + i)} = 55.79... \rightarrow 56 \text{ Jahre}$

9.9 $i = 1.75\%$ (gerundet)
 $K_n = 15'000.00 \text{ CHF}$ für $n = 23.37... \rightarrow 24 \text{ Jahre}$

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst den Zinssatz i , indem Sie die ersten 10 Jahre betrachten (K_0 und K_{10} sind bekannt, i ist unbekannt).
- Bestimmen Sie dann n (K_0 , K_n und i sind bekannt, n ist unbekannt).

9.10 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(1 + i)}$ mit $K_0 = 1000 \text{ CHF}$, $K_n = 1250 \text{ CHF}$, $i = \frac{2.5\%}{360}$
 $\Rightarrow n = 3213.38... \rightarrow 3214 \text{ Tage} = 8.92... \text{ Jahre} \rightarrow 9 \text{ Jahre}$

9.11 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(1 + i)}$ mit $K_0 = 100'000 \text{ CHF}$, $K_n = 150'000 \text{ CHF}$, $i = \frac{8\%}{4} = 2\%$
 $\Rightarrow n = 20.47... \rightarrow 21 \text{ Quartale} = 5 \text{ Jahre } 3 \text{ Monate}$

9.12 a) $E(4) = 2038 \text{ CHF}$ (gerundet)
b) $x = 4.89... \rightarrow 5. \text{ Monat}$

Hinweise:

- Bestimmen Sie x , so dass $E = 1000 \text{ CHF}$.
- Die Gleichung $1000 \text{ CHF} = 50'000 e^{-0.8x} \text{ CHF}$ muss nach x gelöst werden.

- 9.13 a) 1. Aussage
b) 3. Aussage
c) 4. Aussage