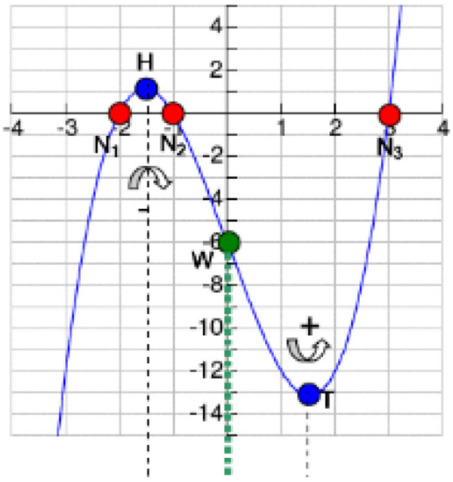
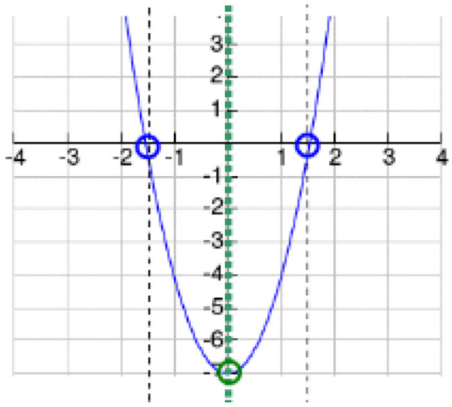
Steigen/Fallen, Krümmung

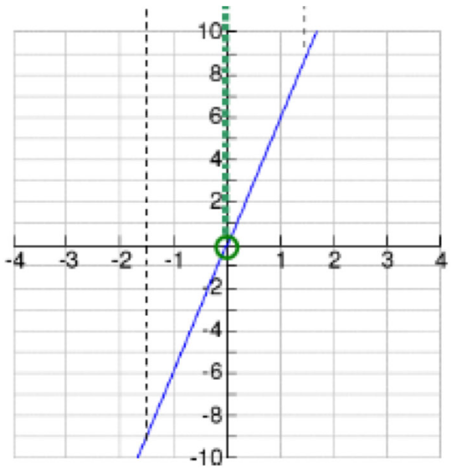
Bsp.: $f(x) = x^3 - 7x - 6$



$f'(x) = 3x^2 - 7$



$f''(x) = 6x$



Steigen/Fallen

Wenn die **erste Ableitung** einer Funktion f bei $x = x_0$ **positiv** ist, d.h. $f'(x_0) > 0$, dann **steigt** der Graf von f bei $x = x_0$.

Wenn die **erste Ableitung** einer Funktion f bei $x = x_0$ **negativ** ist, d.h. $f'(x_0) < 0$, dann **fällt** der Graf von f bei $x = x_0$.

Bem.: Es gilt auch der Umkehrschluss:

Wenn der Graf einer Funktion f bei $x = x_0$ steigt, dann ist die erste Ableitung von f bei $x = x_0$ positiv, d.h. $f'(x_0) > 0$.

Wenn der Graf einer Funktion f bei $x = x_0$ fällt, dann ist die erste Ableitung von f bei $x = x_0$ negativ, d.h. $f'(x_0) < 0$.

Krümmung

Wenn die **zweite Ableitung** einer Funktion f bei $x = x_0$ **positiv** ist, d.h. $f''(x_0) > 0$, dann ist der Graf von f bei $x = x_0$ **konvex** (“Links-Kurve“).

Wenn die **zweite Ableitung** einer Funktion f bei $x = x_0$ **negativ** ist, d.h. $f''(x_0) < 0$, dann ist der Graf von f bei $x = x_0$ **konkav** (“Rechts-Kurve“).

Bem.: Hier gilt der Umkehrschluss **nicht**:

Wenn der Graf einer Funktion f bei $x = x_0$ konvex ist (“Links-Kurve“), dann ist die zweite Ableitung von f bei $x = x_0$ **entweder** positiv **oder** gleich null, d.h. entweder $f''(x_0) > 0$ oder $f''(x_0) = 0$.

Wenn der Graf einer Funktion f bei $x = x_0$ konkav ist (“Rechts-Kurve“), dann ist die zweite Ableitung von f bei $x = x_0$ **entweder** negativ **oder** gleich null, d.h. entweder $f''(x_0) < 0$ oder $f''(x_0) = 0$.

Lokale Maxima/Minima

Eine Funktion f hat bei $x = x_0$ ein **lokales Maximum**, falls die Tangente an den Grafen von f bei $x = x_0$ horizontal ist und falls der Graf von f bei $x = x_0$ konkav ist (“Rechts-Kurve“).

Dies trifft zu, falls $f'(x_0) = 0$ (notwendig) und $f''(x_0) < 0$ (hinreichend).

Eine Funktion f hat bei $x = x_0$ ein **lokales Minimum**, falls die Tangente an den Grafen von f bei $x = x_0$ horizontal ist und falls der Graf von f bei $x = x_0$ konvex ist (“Links-Kurve“).

Dies trifft zu, falls $f'(x_0) = 0$ (notwendig) und $f''(x_0) > 0$ (hinreichend).

Globales Maximum/Minimum

Das **globale Maximum/Minimum** einer stetigen Funktion f ist entweder ein lokales Maximum/Minimum von f oder der Funktionswert von f an einem der Endpunkte des Definitionsbereichs.

Wendepunkte

Eine Funktion f hat bei $x = x_0$ einen **Wendepunkt**, falls der Graf von f bei $x = x_0$ seine Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.

Dies trifft zu, falls $f''(x_0) = 0$ (notwendig) und $f'''(x_0) \neq 0$ (hinreichend).

Bsp.: (siehe nächste Seite)

Bsp.: $f(x) = x^3 - 7x - 6$ (siehe Seite 1) $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 7$

$\Rightarrow f''(x) = 6x$

$\Rightarrow f'''(x) = 6$

Lokale Maxima/Minima

$f'(x) = 0$ bei $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}} = 1.52\ldots$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}} = -1.52\ldots$

$f''(x_1) = 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = 9.16\ldots > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$f''(x_2) = -6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = -9.16\ldots < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

Globales Maximum/Minimum

Bsp.: $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le x \le 4\}$

$\Rightarrow$ globales Maximum bei $x = 4$ (Endpunkt des Def.bereichs)

$\Rightarrow$ globales Minimum bei $x = x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$ (lokales Minimum)

Bsp.: $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } -4 \le x \le 3\}$

$\Rightarrow$ globales Maximum bei $x = x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ (lokales Maximum)

$\Rightarrow$ globales Minimum bei $x = -4$ (Endpunkt des Def.bereichs)

Wendepunkte

$f''(x) = 0$ bei $x_3 = 0$

$f'''(x_3) = 6 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_3 = 0$

Finanzmathematik

Grenzkosten-/Grenzertrags-/Grenzgewinnfunktion
= erste Ableitung der Kosten-/Ertrags-/Gewinnfunktion

Bsp.:	Kostenfunktion	$K(x) = (2x^2 + 120)$ CHF
	⇒ Grenzkostenfunktion	$K'(x) = 4x$ CHF
	Ertragsfunktion	$E(x) = (-x^2 + 168x)$ CHF
	⇒ Grenzertragsfunktion	$E'(x) = (-2x + 168)$ CHF
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x) = (-3x^2 + 168x - 120)$ CHF
	⇒ Grenzgewinnfunktion	$G'(x) = (-6x + 168)$ CHF

Durchschnittskosten-/Durchschnittsertrags-/Durchschnittsgewinnfunktion

Durchschnittskostenfunktion/Stückkostenfunktion $\overline{K}(x) := \frac{K(x)}{x}$ mit $K(x)$ = Kostenfunktion

Bsp.: Kostenfunktion $K(x) = (3x^2 + 4x + 2)$ CHF
⇒ Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}(x) = \left(3x + 4 + \frac{2}{x}\right)$ CHF

Durchschnittsertragsfunktion $\overline{E}(x) := \frac{E(x)}{x}$ mit $E(x)$ = Ertragsfunktion

Durchschnittsgewinnfunktion $\overline{G}(x) := \frac{G(x)}{x}$ mit $G(x)$ = Gewinnfunktion