

Aufgaben 7 Quadratische Funktion und Gleichungen

Quadr. Funktion/Gleichungen, Angebot, Nachfrage, Marktgleichgewicht

Lernziele

- den Zusammenhang zwischen einer quadratischen Funktion und einer quadratischen Gleichung kennen und verstehen.
- eine quadratische Gleichung mit der Methode der quadratischen Ergänzung lösen können.
- eine quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel lösen können.
- spezielle quadratische Gleichungen ohne Lösungsformel lösen können.
- eine quadratische Gleichung mit einem Parameter lösen können.
- die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten des Scheitelpunktes und den Koordinaten eines weiteren Punktes der dazugehörigen Parabel bestimmen können.
- die allgemeine Form einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten dreier Punkte der dazugehörigen Parabel bestimmen können.
- angewandte Problemstellungen aus dem Bereich Volks- und Betriebswirtschaft mit Hilfe von quadratischen Gleichungen oder Gleichungssystemen bearbeiten können.

Aufgaben

7.1 Jede quadratische Gleichung kann in die folgende allgemeine Form umgeformt werden:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

Bestimmen Sie die Anzahl Lösungen, die eine quadratische Funktion haben kann, d.h. versuchen Sie, die verschiedenen Fälle für die Anzahl Lösungen herauszufinden.

Hinweise:

- Erinnern Sie sich an unsere Diskussion über die mögliche Anzahl Lösungen einer linearen Gleichung.
- Vergleichen Sie die linke Seite der quadratischen Gleichung (*) mit der allgemeinen Form der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion.
- Stellen Sie sich den Grafen einer quadratischen Funktion vor.

7.2 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen ...

- i) ... mit der Methode der quadratischen Ergänzung.
- ii) ... mit Hilfe der Lösungsformel.

Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a) $x^2 + 10x + 24 = 0$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $x^2 + 2x + 8 = 0$

d) $x^2 - 14x + 49 = 0$

7.3 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a) $x^2 + 22x + 121 = 0$

b) $5x^2 + 8x - 4 = 0$

c) $5x^2 - 8x + 4 = 0$

d) $24x^2 - 65x + 44 = 0$

e) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$

f) $-9x^2 - 54x - 63 = 0$

7.4 (siehe nächste Seite)

7.4 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

- | | |
|---|---|
| a) $9(x - 10) - x(x - 15) = x$ | b) $3(x^2 + 2) - x(x + 9) = 11$ |
| c) $y^3 + 19 = (y + 4)^3$ | d) $\frac{9x - 8}{4x + 7} = \frac{3x}{2x + 5}$ |
| e) $\frac{x^2}{x - 6} - \frac{6x}{6 - x} = 1$ | f) $\frac{8}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} = 3x - 1$ |

7.5 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen, ohne die Lösungsformel zu verwenden. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $(x + 2)(x + 5) = 0$ | b) $(x - 8)(5x - 9) = 0$ |
| c) $x^2 - 3x = 0$ | d) $x^2 + 7x = 0$ |
| e) $4x^2 - 9 = 0$ | f) $100x^2 - 1 = 0$ |
| g) $3x^2 = 27$ | h) $x^2 = x$ |

7.6 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) $(7 + x)(7 - x) = (3x + 2)^2 - (2x + 3)^2$ | b) $(x - 3)(2x - 7) = 1$ |
| c) $\frac{x - 4}{x - 5} = \frac{30 - x^2}{x^2 - 5x}$ | d) $\frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = 1$ |
| e) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = 0$ | f) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = 1$ |

7.7 Die folgenden quadratischen Gleichungen enthalten einen Parameter p. Die Lösungsmenge der Gleichungen hängt daher vom Wert dieses Parameters ab.

Lösen Sie die Gleichungen nach x.

- | | |
|----------------------|------------------------|
| a) $x^2 + x + p = 0$ | b) $3x^2 + px - p = 0$ |
|----------------------|------------------------|

7.8 Eine Parabel hat den Scheitelpunkt S und enthält den Punkt P.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion sowohl in der Scheitelpunktsform als auch in der allgemeinen Form.

- | | |
|------------|---------|
| a) S(2 4) | P(-1 7) |
| b) S(1 -8) | P(2 -7) |

7.9 Eine Parabel enthält die drei Punkte P, Q und R.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion in der allgemeinen Form.

- | | | |
|------------|--------|----------|
| a) P(-4 8) | Q(0 0) | R(10 15) |
| b) P(1 -1) | Q(2 4) | R(4 8) |

7.10 Bestimmen Sie zu den gegebenen Angebots- und Nachfragefunktionen f_A und f_N einer Dienstleistung die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis:

- | | |
|------------|---|
| a) Angebot | $p = f_A(q) = \left(\frac{1}{4}q^2 + 10\right) \text{ CHF}$ |
| Nachfrage | $p = f_N(q) = (86 - 6q - 3q^2) \text{ CHF}$ |
| b) Angebot | $p = f_A(q) = (q^2 + 8q + 16) \text{ CHF}$ |
| Nachfrage | $p = f_N(q) = (-3q^2 + 6q + 436) \text{ CHF}$ |

- 7.11 Die Gesamtkosten $K(x)$ bei der Produktion von x Artikeln und der Ertrag $E(x)$ beim Verkauf von x Artikeln sind gegeben durch

$$K(x) = (2000 + 40x + x^2) \text{ CHF}$$

$$E(x) = 130x \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Stückzahl(en) x für die Gewinnschwelle(n).

- 7.12 Die Gesamtkosten $K(x)$ bei der Produktion von x Artikeln und der Ertrag $E(x)$ beim Verkauf von x Artikeln sind gegeben durch

$$K(x) = (x^2 + 100x + 80) \text{ CHF}$$

$$E(x) = (160x - 2x^2) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Anzahl Artikel, welche hergestellt und verkauft werden müssen, damit ein Gewinn von 200 CHF erzielt wird.

- 7.13 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Eine quadratische Gleichung ...

☐

... hat keine Lösung, wenn sich der Scheitelpunkt des Grafen der entsprechenden quadratischen Funktion unterhalb der x -Achse befindet.

☐

... hat immer eine oder zwei Lösungen.

☐

... hat genau eine Lösung, falls der Scheitelpunkt des Grafen der entsprechenden quadratischen Funktion auf der x -Achse liegt.

☐

... kann unendlich viele Lösungen haben.

b) Der Graf einer quadratischen Funktion ...

☐

... ist eindeutig, wenn der Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt des Grafen bekannt sind.

☐

... ist eine Gerade, falls die entsprechende quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.

☐

... ist eine quadratische Gleichung.

☐

... kann durch Lösen einer quadratischen Gleichung bestimmt werden.

c) Falls die Gesamtkostenfunktion quadratisch und die Ertragsfunktion linear ist, dann ...

☐

... ist die Gewinnfunktion linear.

☐

... entspricht eine Gewinnschwelle der Lösung einer quadratischen Gleichung.

☐

... gibt es immer genau eine Gewinnschwelle.

☐

... kann der Gewinn bei einer Gewinnschwelle positiv sein.