Aufgaben 6 — Quadratische Funktion und Gleichungen
Quadratische Funktion

Lernziele

- den Grafen einer quadratischen Funktion aus der Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung skizzieren können.
- die Lage des Scheitelpunktes einer Parabel aus der Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion bestimmen können.
- die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in die allgemeine Form umformen können.
- die Methode der quadratischen Ergänzung kennen, verstehen und anwenden können.
- die allgemeine Form der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform umformen können.

Aufgaben

6.1 Betrachten Sie die einfachstmögliche quadratische Funktion:

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = x^2 \end{aligned}$$

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle von f für das Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

b) Zeichnen Sie den Grafen von f im Intervall $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

6.2 Die Funktionsgleichung einer allgemeinen quadratischen Funktion kann in der sogenannten Scheitelpunktsform geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f:\ & D \to \mathbb{R} && (D \subseteq \mathbb{R}) \\ & x \mapsto y = f(x) = a(x - u)^2 + v && (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ u \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Untersuchen Sie den Einfluss der drei Parameter **a**, **u** und **v** auf den Grafen einer quadratischen Funktion.

Vorgehen:
- In jeder Teilaufgabe a) bis d) sind drei quadratische Funktionen f_0, f_1 und f_2 gegeben.
- In den drei Funktionen wird einer der drei Parameter verändert, während die anderen beiden Parameter konstant gehalten werden.
- Der Einfluss des entsprechenden Parameters kann beschrieben werden, indem man die Grafen der drei Funktionen vergleicht.

a) Parameter **u** (**u wird verändert**, a und v werden konstant gehalten)

$y = f_0(x) = x^2$ $\quad(a = 1, \mathbf{u = 0}, v = 0)$
$y = f_1(x) = (x - 2)^2$ $\quad(a = 1, \mathbf{u = 2}, v = 0)$
$y = f_2(x) = (x + 1)^2$ $\quad(a = 1, \mathbf{u = -1}, v = 0)$

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f_0, f_1 und f_2 in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **u**, indem Sie die drei Grafen vergleichen.

b) Parameter **v** (**v wird verändert**, a und u werden konstant gehalten)

$y = f_0(x) = x^2$ $\quad(a = 1, u = 0, \mathbf{v = 0})$
$y = f_1(x) = x^2 + 3$ $\quad(a = 1, u = 0, \mathbf{v = 3})$
$y = f_2(x) = x^2 - 2$ $\quad(a = 1, u = 0, \mathbf{v = -2})$

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f_0, f_1 und f_2 in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **v**, indem Sie die drei Grafen vergleichen.

c) Parameter **a** (**a wird verändert**, u und v werden konstant gehalten)

$y = f_0(x) = x^2$ ($\mathbf{a = 1}$, u = 0, v = 0)
$y = f_1(x) = 2x^2$ ($\mathbf{a = 2}$, u = 0, v = 0)
$y = f_2(x) = -2x^2$ ($\mathbf{a = -2}$, u = 0, v = 0)

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f_0, f_1 und f_2 in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **a**, indem Sie die drei Grafen vergleichen.

d) Parameter **a** (**a wird verändert**, u und v werden konstant gehalten)

$y = f_0(x) = x^2$ ($\mathbf{a = 1}$, u = 0, v = 0)
$y = f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\left(\mathbf{a = \frac{1}{2}}, u = 0, v = 0\right)$
$y = f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2$ $\left(\mathbf{a = -\frac{1}{2}}, u = 0, v = 0\right)$

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen f_0, f_1 und f_2 in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **a**, indem Sie die drei Grafen vergleichen.

6.3 Bearbeiten Sie jede quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$ in a) bis h) wie folgt:

i) Geben Sie die Parameter a, u und v an.

ii) Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes des Grafen an.

iii) Geben Sie an, ob die Parabel, d.h. der Graf der Funktion, nach oben oder nach unten geöffnet ist.

iv) Zeichnen Sie den Grafen der Funktion.

a) $y = f(x) = (x + 2)^2$

b) $y = f(x) = -3x^2$

c) $y = f(x) = 2x^2 - 1$

d) $y = f(x) = -(x - 3)^2 + 4$

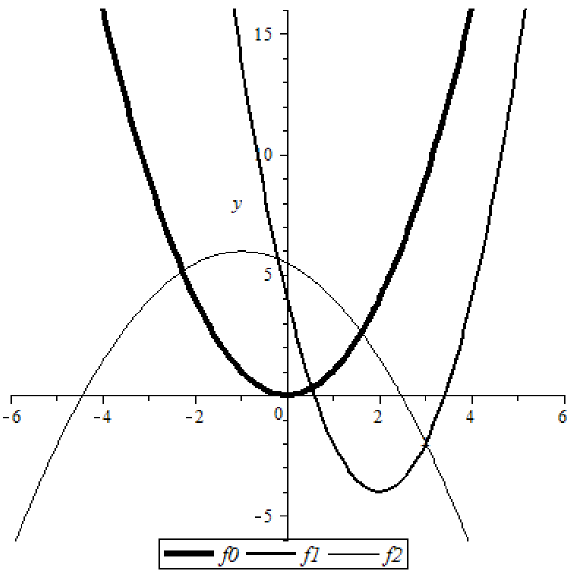
e) $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$

f) $y = f(x) = -2(x - 1)^2 + 5$

g) $y = f(x) = \frac{5}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

h) $y = f(x) = -\frac{1}{2} - 3(2 - x)^2$

6.4 Betrachten Sie die Grafen der quadratischen Funktionen f_0, f_1 und f_2:



Bestimmen Sie die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichungen der drei Funktionen, d.h. y = f(x) = ...

6.5 Formen Sie die gegebene Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion von der Scheitelpunktsform in die allgemeine Form um:

a) $y = f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$ b) $y = f(x) = -(x + 2)^2 - 3$

c) $y = f(x) = x^2 + 5$ d) $y = f(x) = -3(x - 4)^2$

6.6 Formen Sie die gegebene Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktsform um:

a) $y = f(x) = 3x^2 - 12x + 8$ b) $y = f(x) = x^2 + 6x$

c) $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$ d) $y = f(x) = 2x^2 + 12x + 18$

e) $y = f(x) = -2x^2 - 6x - 2$ f) $y = f(x) = x^2 + 1$

g) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ h) $y = f(x) = -4x^2 + 24x - 43$

i) $y = f(x) = 2(x - 3)(x + 4)$ j) $y = f(x) = x + 3 - \left(x + \frac{1}{2}\right) x$

6.7 Beurteilen Sie die Grafen der quadratischen Funktionen f in den Aufgaben 6.6 a) bis f) wie folgt:

i) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.

ii) Geben Sie an, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist.

6.8 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Der Graf einer quadratischen Funktion ...

- ☐ ... schneidet die x-Achse immer in zwei Punkten.
- ☐ ... ist nach unten geöffnet, falls er keinen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse hat.
- ☐ ... berührt die x-Achse, falls es nur einen Scheitelpunkt gibt.
- ☐ ... ist immer eine Parabel.

b) f ist eine lineare und g eine quadratische Funktion. Es kann gefolgert werden, dass die Grafen von f und g ...

- ☐ ... keine gemeinsamen Punkte haben.
- ☐ ... sich nur schneiden, falls die Steigung von f nicht null ist.
- ☐ ... nicht mehr als zwei gemeinsame Punkte haben können.
- ☐ ... mindestens einen gemeinsamen Punkt haben.

c) Die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ...

- ☐ ... ist identisch mit der allgemeinen Form, falls der Scheitelpunkt des Grafen auf der y-Achse liegt.
- ☐ ... kann aus der allgemeinen Form durch Ausmultiplizieren aller Terme erhalten werden.
- ☐ ... existiert nicht, falls der Graf nach unten geöffnet ist.
- ☐ ... hängt nur von der Lage des Scheitelpunktes ab.

Lösungen

6.1 …

6.2 a) i) …

ii) Verschiebung um u Einheiten in positiver x-Richtung

b) i) …

ii) Verschiebung um v Einheiten in positiver y-Richtung

c) i) …

ii) Streckung um den Faktor a in y-Richtung bezüglich des Koordinatenursprungs
falls $a < 0$: Spiegelung an der x-Achse

d) i) …

ii) Stauchung um den Faktor 1/a in y-Richtung bezüglich des Koordinatenursprungs
falls $a < 0$: Spiegelung an der x-Achse

6.3 a) i) $a = 1$, $u = -2$, $v = 0$

ii) $S(-2|0)$

iii) Parabel nach oben geöffnet

iv) ...

b) i) $a = -3$, $u = 0$, $v = 0$

ii) $S(0|0)$

iii) Parabel nach unten geöffnet

iv) ...

c) i) $a = 2$, $u = 0$, $v = -1$

ii) $S(0|-1)$

iii) Parabel nach oben geöffnet

iv) ...

d) i) $a = -1$, $u = 3$, $v = 4$

ii) $S(3|4)$

iii) Parabel nach unten geöffnet

iv) ...

e) (siehe nächste Seite)

e) i) $a = \frac{1}{2}$, $u = -3$, $v = 2$

ii) S(-3|2)

iii) Parabel nach oben geöffnet

iv) ...

f) i) $a = -2$, $u = 1$, $v = 5$

ii) S(1|5)

iii) Parabel nach unten geöffnet

iv) ...

g) i) $a = -1$, $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{5}{2}$

ii) $S\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{5}{2}\right)$

iii) Parabel nach unten geöffnet

iv) ...

h) i) $a = -3$, $u = 2$, $v = -\frac{1}{2}$

ii) $S\left(2\middle|-\frac{1}{2}\right)$

iii) Parabel nach unten geöffnet

iv) ...

6.4 $y = f_0(x) = x^2$

$y = f_1(x) = 2(x - 2)^2 - 4$

$y = f_2(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 6$

Hinweise :
- Lesen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes direkt aus dem Grafen ab.
- Betrachten Sie einen weiteren Punkt des Grafen.

6.5 a) $y = f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

b) $y = f(x) = -x^2 - 4x - 7$

c) $y = f(x) = x^2 + 5$

Bemerkung:
- Dies ist sowohl die allgemeine Form als auch die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung.

d) $y = f(x) = -3x^2 + 24x - 48$

6.6 a) $y = f(x) = 3(x - 2)^2 - 4$

b) $y = f(x) = (x + 3)^2 - 9$

c) $y = f(x) = (x - 1)^2$

d) (siehe nächste Seite)

d) $y = f(x) = 2(x + 3)^2$

e) $y = f(x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

f) $y = f(x) = x^2 + 1$

Bemerkung:
- Dies ist sowohl die allgemeine Form als auch die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung.

g) $y = f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$

h) $y = f(x) = -4(x - 3)^2 - 7$

i) $y = f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{2}$

j) $y = f(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{49}{16}$

6.7
a) i) S(2|-4)
ii) Parabel nach oben geöffnet

b) i) S(-3|-9)
ii) Parabel nach oben geöffnet

c) i) S(1|0)
ii) Parabel nach oben geöffnet

d) i) S(-3|0)
ii) Parabel nach oben geöffnet

e) i) $S\left(-\frac{3}{2}\middle|\frac{5}{2}\right)$
ii) Parabel nach unten geöffnet

f) i) S(0|1)
ii) Parabel nach oben geöffnet

g) i) S(2|0)
ii) Parabel nach unten geöffnet

h) i) S(3|-7)
ii) Parabel nach unten geöffnet

i) i) $S\left(-\frac{1}{2}\middle|-\frac{49}{2}\right)$
ii) Parabel nach oben geöffnet

j) i) $S\left(\frac{1}{4}\middle|\frac{49}{16}\right)$
ii) Parabel nach unten geöffnet

6.8
a) 4. Aussage
b) 3. Aussage
c) 1. Aussage