

## Aufgaben 2

### Funktion Definitions- und Zielmenge, Bildmenge, Graf

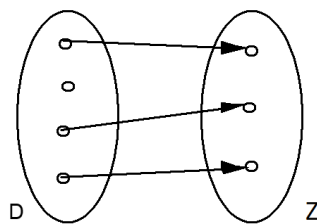
#### Lernziele

- verstehen, was eine Funktion ist.
- beurteilen können, ob eine gegebene Relation eine Funktion ist.
- die Definitions- und die Bildmenge einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- Funktionswerte einer gegebenen Funktion bestimmen können.

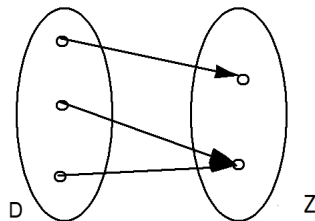
#### Aufgaben

2.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen Funktionen sind.

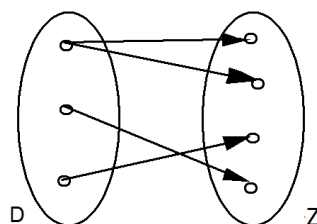
a)



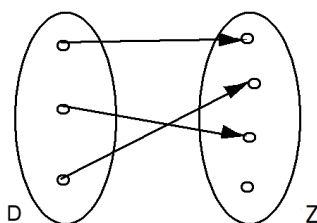
b)



c)



d)



- e)  $D$  = Menge aller Kurse im FHGR-Bachelor-Studium Digital Business Management  
 $Z$  = Menge aller FHGR-Lehrpersonen  
 $f: D \rightarrow Z, k \mapsto l = f(k)$  = Lehrperson im Kurs  $k$

- f)  $D = \{1995, 1996, \dots, 2004, 2005\}$   
 $Z = \text{Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen}$   
 $f: D \rightarrow Z, j \mapsto m = f(j) = \text{Mensch mit Jahrgang } j$
- g)  $D = \text{Menge aller 20- bis 30-jährigen Menschen}$   
 $Z = \{1995, 1996, \dots, 2004, 2005\}$   
 $f: D \rightarrow Z, m \mapsto j = f(m) = \text{Jahrgang des Menschen } m$
- h)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = x^2$
- i)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \text{Zahl, welche quadriert gleich } x \text{ ergibt}$   
Hinweis:  
-  $\mathbb{R}^+$  ist die Menge aller positiven reellen Zahlen, d.h.  $\mathbb{R}^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x > 0\}$ .
- j)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto b = f(t) = \text{Bankkontostand zum Zeitpunkt } t$

2.2 Bestimmen Sie die Bildmenge B der folgenden Funktionen:

- a)  $D = \{\text{Januar, Februar, März, ..., Dezember}\}$   
 $Z = \{A, B, C, \dots, Z\}$   
 $f: D \rightarrow Z, m \mapsto b = f(m) = \text{Anfangsbuchstabe des Monats } m$
- b)  $D = \text{Menge aller Nachbarländer der Schweiz}$   
 $Z = \text{Menge aller europäischen Städte und Ortschaften}$   
 $h: D \rightarrow Z, x \mapsto y = h(x) = \text{Hauptstadt/-ort des Nachbarlandes } x$
- c) Funktion f in der Aufgabe 2.1 g)
- d) Funktion f in der Aufgabe 2.1 h)

2.3 a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3 - x$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

- |              |               |                  |
|--------------|---------------|------------------|
| i) $f(1)$    | ii) $f(-2)$   | iii) $f(a)$      |
| iv) $f(b^2)$ | v) $f(a - b)$ | vi) $f(x^3 - x)$ |

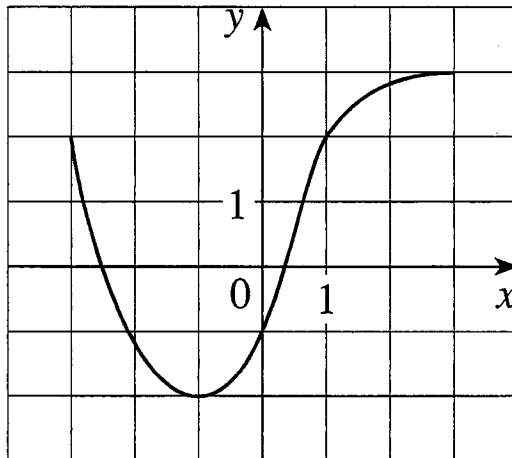
b)  $g: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(x) = \frac{x^2}{x+1}$

Bestimmen Sie die folgenden Funktionswerte:

- |              |               |                                     |
|--------------|---------------|-------------------------------------|
| i) $g(2)$    | ii) $g(-3)$   | iii) $g(a)$                         |
| iv) $g(b^2)$ | v) $g(a - b)$ | vi) $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$ |

2.4 (siehe nächste Seite)

2.4 Gegeben ist der Graf einer Funktion f:



- Geben Sie den Funktionswert  $f(-1)$  an.
- Schätzen Sie den Funktionswert  $f(2)$  ab.
- Geben Sie alle Werte von  $x$  an, für welche  $f(x) = 2$  gilt.
- Schätzen Sie alle Werte von  $x$  ab, für welche  $f(x) = 0$  gilt.
- Geben Sie den Definitionsbereich (d.h. die Definitionsmenge)  $D$  von  $f$  an.
- Geben Sie den Wertebereich (d.h. die Bildmenge)  $B$  von  $f$  an.

2.5 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- Der Wertebereich (d.h. die Bildmenge)  $B$  der Funktion  $f: \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x-4}$ , ist die Menge ...
  - ☐ ...  $\{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 4\}$
  - ☐ ...  $\{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } y \geq 4\}$
  - ☐ ...  $\mathbb{R}$
  - ☐ ...  $\mathbb{R}_0^+$
- $f$  kann keine Funktion sein, falls ...
  - ☐ ... die Definitionsmenge von  $f$  keine Zahlenmenge ist.
  - ☐ ... die Zielmenge von  $f$  mehr Elemente enthält als die Definitionsmenge von  $f$ .
  - ☐ ... die Definitionsmenge von  $f$  mehr Elemente enthält als die Zielmenge von  $f$ .
  - ☐ ... mindestens ein Element der Definitionsmenge mehr als ein Bildelement hat.
- Wenn bei einer Funktion die Bildmenge gleich viele Elemente enthält wie die Definitionsmenge, dann kann man folgern, dass ...
  - ☐ ... die Bildmenge die gleiche Menge ist wie die Definitionsmenge.
  - ☐ ... die Zielmenge gleich viele Elemente enthält wie die Definitionsmenge.
  - ☐ ... jedes Element der Zielmenge auch ein Element der Bildmenge ist.
  - ☐ ... kein Element der Bildmenge mehr als einem Element der Definitionsmenge zugeordnet wird.

## Lösungen

- 2.1
- a) keine Funktion  
Einem Element von D wird kein Element (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
  - b) Funktion
  - c) keine Funktion  
Einem Element von D werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
  - d) Funktion
  - e) keine Funktion  
Einigen Elementen von D werden zwei oder mehr Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
  - f) keine Funktion  
Jedem Element von D werden viele Elemente (statt genau ein Element) von Z zugeordnet.
  - g) Funktion
  - h) Funktion
  - i) keine Funktion  
Jedem Element von  $\mathbb{R}^+$  werden zwei Elemente (statt genau ein Element) von  $\mathbb{R}$  zugeordnet.
  - j) Funktion

- 2.2
- a)  $B = \{A, D, F, J, M, N, O, S\}$
  - b)  $B = \{\text{Berlin, Wien, Vaduz, Rom, Paris}\}$
  - c)  $B = Z$
  - d)  $B = \mathbb{R}_0^+$

Hinweis:

-  $\mathbb{R}_0^+$  ist die Menge aller positiven reellen Zahlen inkl. Null, d.h.  $\mathbb{R}_0^+ = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$ .

- 2.3
- a)
    - i)  $f(1) = 1^3 - 1 = 0$
    - ii)  $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$
    - iii)  $f(a) = a^3 - a$
    - iv)  $f(b^2) = (b^2)^3 - b^2 = b^6 - b^2$
    - v)  $f(a - b) = (a - b)^3 - (a - b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a + b$
    - vi)  $f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$

- b)
  - i)  $g(2) = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$
  - ii)  $g(-3) = \frac{(-3)^2}{-3+1} = -\frac{9}{2}$
  - iii)  $g(a) = \frac{a^2}{a+1}$
  - iv)  $g(b^2) = \frac{(b^2)^2}{b^2+1} = \frac{b^4}{b^2+1}$
  - v)  $g(a - b) = \frac{(a - b)^2}{(a - b) + 1} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a - b + 1}$
  - vi)  $g\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right) + 1} = \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

- 2.4
- a)  $f(-1) = -2$
  - b)  $f(2) \approx 2.8$
  - c)  $x_1 = -3, x_2 = 1$
  - d)  $x_1 \approx -2.5, x_2 \approx 0.3$
  - e)  $D = \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } -3 \leq x \leq 3\}$
  - f)  $B = \{y: y \in \mathbb{R} \text{ und } -2 \leq y \leq 3\}$
- 2.5
- a) 4. Aussage
  - b) 4. Aussage
  - c) 4. Aussage