

Aufgaben 14 Unbestimmtes Integral Stammfunktion, Unbestimmtes Integral, Faktor-/Summenregel

Lernziele

- eine Stammfunktion und das unbestimmte Integral einer konstanten Funktion, einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- die Faktor- und Summenregel anwenden können, um das unbestimmte Integral einer Funktion bestimmen zu können.
- die Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können, wenn die Grenzkosten-, Grenzertrags- und die Grenzgewinnfunktion bekannt ist.

Aufgaben

14.1 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $\int x^2 dx$ | b) $\int x^3 dx$ |
| c) $\int x^{-5} dx$ | d) $\int \frac{1}{x^2} dx$ |
| e) $\int \frac{1}{x^4} dx$ | f) $\int 4 dx$ |
| g) $\int (-7) dx$ | h) $\int e^x dx$ |
| i) $\int e^{3x} dx$ | j) $\int e^{-x} dx$ |

14.2 Bestimmen Sie das unbestimmte Integral der folgenden Funktionen f:

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = x^5$ | b) $f(x) = 3x^2$ |
| c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ | d) $f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{2}{3x^2}$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ | f) $f(x) = x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x$ |

14.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen jener beiden Stammfunktionen F_1 und F_2 von f , welche die genannten Bedingungen erfüllen.

- | | | |
|--------------------------|--------------|---------------|
| a) $f(x) = 10x^2 + x$ | $F_1(0) = 3$ | $F_2(0) = -1$ |
| b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ | $F_1(2) = 5$ | $F_2(4) = -8$ |

14.4 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der Ableitung f' einer Funktion f :

$$f'(x) = 3x^2 - 50x + 250$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f , falls ...

- | |
|-------------------------|
| a) ... $f(0) = 500$. |
| b) ... $f(10) = 2500$. |

14.5 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f :

$$f''(x) = 2x - 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f , so dass $f'(2) = 4$ und $f(1) = -1$.

14.6 Angenommen, die monatlichen Grenzkosten für ein Produkt oder eine Dienstleistung sind $K'(x) = (2x + 100)$ CHF, und die Fixkosten betragen 200 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion für einen Monat.

- 14.7 Angenommen, die Grenzkosten für ein Produkt oder eine Dienstleistung sind $K'(x) = (4x + 2)$ CHF, und die Produktion oder Erbringung von 10 Einheiten ergeben Gesamtkosten von 300 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion.
- 14.8 Angenommen, die Grenzkosten für ein Produkt oder eine Dienstleistung sind $K'(x) = (4x + 40)$ CHF, und die Gesamtkosten für die Produktion oder Erbringung von 25 Einheiten betragen 3000 CHF. Wie hoch sind die Gesamtkosten für 30 Einheiten?
- 14.9 Eine Firma weiss, dass die Grenzkosten für eine Dienstleistung $K'(x) = (3x + 20)$ CHF sind und dass der Grenzertrag $E'(x) = (-5x + 44)$ CHF ist. Die Gesamtkosten für die Erbringung von 10 Einheiten betragen 370 CHF.

Bestimmen Sie ...

- a) ... die Gewinnfunktion $G(x)$.
- b) ... die Anzahl Einheiten, welche zu einem maximalen Gewinn führen.

Hinweis:

- Der Ertrag ist null, falls keine Einheit verkauft wird, also $E(0) = 0$ CHF.

- 14.10 Angenommen, der Grenzertrag $E'(x)$ und die Ableitung der Durchschnittskosten $\bar{K}'(x)$ eines Unternehmens lauten wie folgt:

$$E'(x) = 400 \text{ CHF}$$

$$\bar{K}'(x) = \left(\frac{2}{15}x - 11 - \frac{10'000}{x^2} \right) \text{ CHF}$$

Aus der Produktion oder Erbringung von 15 Einheiten resultieren Gesamtkosten von 16'750 CHF.

Bestimmen Sie

- a) ... die Gewinnfunktion $G(x)$.
- b) ... die Anzahl Einheiten, welche zu einem maximalen Gewinn führen.
- c) ... den maximalen Gewinn.

- 14.11 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Eine Stammfunktion einer Funktion ist ...

- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.

- b) Das unbestimmte Integral einer Funktion ist ...

- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.

- c) (siehe nächste Seite)

c) Falls $f = g'$, dann ist ...

- ... f eine Stammfunktion von g .
- ... g eine Stammfunktion von f .
- ... f das unbestimmte Integral von g .
- ... g das unbestimmte Integral von f .