

## Repetitions-Aufgaben 2

## Differentialrechnung, Integralrechnung

### Aufgaben

R2.1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) "Die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer Funktion ist eine Funktion."
- b) "Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist eine Zahl."
- c) "Die Funktion  $f$  hat ein lokales Maximum bei  $x = x_1$ , falls  $f'(x_1) = 0$  und  $f''(x_1) > 0$ ."
- d) "Falls  $f''(x_2) = 0$  und  $f'''(x_2) < 0$ , dann hat die Funktion  $f$  einen Wendepunkt bei  $x = x_2$ ."
- e) "Falls  $g' = f$ , dann ist  $g$  eine Stammfunktion von  $f$ ."
- f) "f mit  $f(x) = 2x + 20$  ist eine Stammfunktion von  $g$  mit  $g(x) = x^2$ ."
- g) "f mit  $f(x) = 3x$  hat unendlich viele Stammfunktionen."
- h) "Das unbestimmte Integral einer Funktion ist eine Menge von Funktionen."

R2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert  $f(x_0)$ , die erste Ableitung  $f'(x_0)$  und die zweite Ableitung  $f''(x_0)$  der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ :

- a)  $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$   $x_0 = -1$
- b)  $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$   $x_0 = -2$
- c)  $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{-3x}$   $x_0 = -\frac{1}{3}$

R2.3 Bestimmen Sie für die gegebene Gesamtkostenfunktion  $K(x)$  und Ertragsfunktion  $E(x)$  ...

- i) ... die Grenzkostenfunktion  $K'(x)$ .
- ii) ... die Grenzertragsfunktion  $E'(x)$ .
- iii) ... die Grenzgewinnfunktion  $G'(x)$ .
- a)  $K(x) = (40x + 200)$  CHF  $E(x) = 60x$  CHF
- b)  $K(x) = (5x^2 + 20x + 100)$  CHF  $E(x) = (-2x^2 + 100x)$  CHF
- c)  $K(x) = (20x^2 + 50 + 3e^{4x})$  CHF  $E(x) = (200x - e^{4x^2})$  CHF

R2.4 Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die gegebene Funktion ...

- i) ... ein lokales Maximum hat.  
... ein lokales Minimum hat.
- ii) ... einen Wendepunkt hat.
- a)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
- b)  $f(x)$  wie in R2.2 a)

R2.5 Die Ertragsfunktion für eine Ware oder eine Dienstleistung ist gegeben durch

$$E(x) = (-0.01x^2 + 36x) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie den maximalen Ertrag, falls die Produktion auf höchstens 1500 Einheiten begrenzt ist.

- R2.6 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Ware oder eine Dienstleistung sind

$$K(x) = (x^2 + 100) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten  $x$ , bei welcher die Produktion oder Erbringung zu minimalen Durchschnittskosten führt.

Bestimmen Sie auch diese minimalen Durchschnittskosten.

- R2.7 Eine Firma kann pro Monat nur 1000 Einheiten herstellen. Die monatlichen Gesamtkosten sind gegeben durch

$$K(x) = (200x + 300) \text{ CHF}$$

wobei  $x$  die hergestellte Stückzahl ist. Angenommen, der Ertrag ist gegeben durch

$$E(x) = \left(-\frac{1}{100}x^2 + 250x\right) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Stückzahl, bei welcher die Firma einen maximalen Gewinn erzielt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

- R2.8 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a)  $\int (x^4 - 3x^3 - 6) \, dx$

b)  $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right) \, dx$

- R2.9 Die Funktionsgleichung der dritten Ableitung  $f'''$  einer Funktion ist wie folgt gegeben:

$$f'''(x) = 3x + 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $f$ , so dass  $f''(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  und  $f(0) = 2$ .

- R2.10 Angenommen, die Grenzkosten für die Herstellung eines Produktes oder die Erbringung einer Dienstleistung sind  $K'(x) = (5x + 10)$  CHF, wobei die Fixkosten 800 CHF betragen.

Bestimmen Sie die Gesamtkosten für die Herstellung oder Erbringung von 20 Einheiten.

- R2.11 Die Grenzkosten  $K'(x)$  und die Ableitung des Durchschnittsertrages  $\bar{E}'(x)$  einer bestimmten Firma sind wie folgt gegeben:

$$K'(x) = (6x + 60) \text{ CHF}$$

$$\bar{E}'(x) = -1 \text{ CHF}$$

Bei der Produktion oder Erbringung von 10 Einheiten sind die Gesamtkosten 1000 CHF und der Ertrag 1700 CHF.

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten  $x$ , welche zu einem maximalen Gewinn führt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

- R2.12 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = (4x + 4) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-x^2 + 49) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und die Produzentenrente.

R2.13 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = \left( ax^2 - \frac{6}{5}x + 2 \right) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-bx^2 + 110) \text{ CHF}$$

mit den unbekannten Parametern a und b. Der Gleichgewichtspreis ist 10 CHF, und die Produzentenrente beträgt 73.33 CHF (gerundet).

Bestimmen Sie die beiden unbekannten Parameter a und b.

Hinweis:

- Verwenden Sie den ungerundeten Wert  $\left( 73 + \frac{1}{3} \right) \text{ CHF} = \frac{220}{3} \text{ CHF}$  für die Produzentenrente.