Repetitions-Aufgaben 2 — Differentialrechnung, Integralrechnung

Aufgaben

R2.1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) "Die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer Funktion ist eine Funktion."

b) "Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist eine Zahl."

c) "Die Funktion f hat ein lokales Maximum bei $x = x_1$, falls $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$."

d) "Falls $f''(x_2) = 0$ und $f'''(x_2) < 0$, dann hat die Funktion f einen Wendepunkt bei $x = x_2$."

e) "Falls $g' = f$, dann ist g eine Stammfunktion von f."

f) "f mit $f(x) = 2x + 20$ ist eine Stammfunktion von g mit $g(x) = x^2$."

g) "f mit $f(x) = 3x$ hat unendlich viele Stammfunktionen."

h) "Das unbestimmte Integral einer Funktion ist eine Menge von Funktionen."

R2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert $f(x_0)$, die erste Ableitung $f'(x_0)$ und die zweite Ableitung $f''(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0:

a) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$ $\quad x_0 = -1$

b) $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1)\cdot e^x$ $\quad x_0 = -2$

c) $f(x) = (x^2 + 2)\cdot e^{-3x}$ $\quad x_0 = -\frac{1}{3}$

R2.3 Bestimmen Sie für die gegebene Gesamtkostenfunktion K(x) und Ertragsfunktion E(x) ...

i) ... die Grenzkostenfunktion K'(x).

ii) ... die Grenzertragsfunktion E'(x).

iii) ... die Grenzgewinnfunktion G'(x).

a) $K(x) = (40x + 200)$ CHF $\quad E(x) = 60x$ CHF

b) $K(x) = (5x^2 + 20x + 100)$ CHF $\quad E(x) = (-2x^2 + 100x)$ CHF

c) $K(x) = (20x^2 + 50 + 3e^{4x})$ CHF $\quad E(x) = \left(200x - e^{-4x^2}\right)$ CHF

R2.4 Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die gegebene Funktion …

i) … ein lokales Maximum hat.
… ein lokales Minimum hat.

ii) … einen Wendepunkt hat.

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$

b) f(x) wie in R2.2 a)

R2.5 Die Ertragsfunktion für eine Ware oder eine Dienstleistung ist gegeben durch

$$E(x) = (-0.01x^2 + 36x) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie den maximalen Ertrag, falls die Produktion auf höchstens 1500 Einheiten begrenzt ist.

R2.6 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Ware oder eine Dienstleistung sind

$$K(x) = (x^2 + 100) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten x, bei welcher die Produktion oder Erbringung zu minimalen Durchschnittskosten führt.

Bestimmen Sie auch diese minimalen Durchschnittskosten.

R2.7 Eine Firma kann pro Monat nur 1000 Einheiten herstellen. Die monatlichen Gesamtkosten sind gegeben durch

$$K(x) = (200x + 300) \text{ CHF}$$

wobei x die hergestellte Stückzahl ist. Angenommen, der Ertrag ist gegeben durch

$$E(x) = \left(-\frac{1}{100}x^2 + 250x\right) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Stückzahl, bei welcher die Firma einen maximalen Gewinn erzielt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

R2.8 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6)\ dx$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right)\ dx$

R2.9 Die Funktionsgleichung der dritten Ableitung f ''' einer Funktion ist wie folgt gegeben:

$$f'''(x) = 3x + 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, so dass $f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f(0) = 2$.

R2.10 Angenommen, die Grenzkosten für die Herstellung eines Produktes oder die Erbringung einer Dienstleistung sind $K'(x) = (5x + 10)$ CHF, wobei die Fixkosten 800 CHF betragen.

Bestimmen Sie die Gesamtkosten für die Herstellung oder Erbringung von 20 Einheiten.

R2.11 Die Grenzkosten $K'(x)$ und die Ableitung des Durchschnittsertrages $\overline{E}'(x)$ einer bestimmten Firma sind wie folgt gegeben:

$$K'(x) = (6x + 60) \text{ CHF}$$

$$\overline{E}'(x) = -1 \text{ CHF}$$

Bei der Produktion oder Erbringung von 10 Einheiten sind die Gesamtkosten 1000 CHF und der Ertrag 1700 CHF.

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten x, welche zu einem maximalen Gewinn führt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

R2.12 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = (4x + 4) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-x^2 + 49) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und die Produzentenrente.

R2.13 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = \left(ax^2 - \frac{6}{5}x + 2\right) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-\,bx^2 + 110) \text{ CHF}$$

mit den unbekannten Parametern a und b. Der Gleichgewichtspreis ist 10 CHF, und die Produzentenrente beträgt 73.33 CHF (gerundet).

Bestimmen Sie die beiden unbekannten Parameter a und b.

Hinweis:
- Verwenden Sie den ungerundeten Wert $\left(73 + \frac{1}{3}\right)$ CHF $= \frac{220}{3}$ CHF für die Produzentenrente.

Lösungen

R2.1 a) wahr

b) wahr

c) falsch

d) wahr

e) wahr

f) falsch

g) wahr

h) wahr

R2.2 a)
$f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$ $\quad$ $f(-1) = 0$
$f'(x) = 16x^3 - 8x$ $\quad$ $f'(-1) = -8$
$f''(x) = 48x^2 - 8$ $\quad$ $f''(-1) = 40$

b)
$f(x) = (-3x^2 + 2x - 1)\cdot e^x$ $\quad$ $f(-2) = -17\cdot e^{-2} = -2.300\ldots$
$f'(x) = (-3x^2 - 4x + 1)\cdot e^x$ $\quad$ $f'(-2) = -3\cdot e^{-2} = -0.406\ldots$
$f''(x) = (-3x^2 - 10x - 3)\cdot e^x$ $\quad$ $f''(-2) = 5\cdot e^{-2} = 0.676\ldots$

c)
$f(x) = (x^2 + 2)\cdot e^{-3x}$ $\quad$ $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{9}e = 5.738\ldots$
$f'(x) = (-3x^2 + 2x - 6)\cdot e^{-3x}$ $\quad$ $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -7e = -19.027\ldots$
$f''(x) = (9x^2 - 12x + 20)\cdot e^{-3x}$ $\quad$ $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 25e = 67.957\ldots$

R2.3 a)
i) $K'(x) = 40$ CHF
ii) $E'(x) = 60$ CHF
iii) $G'(x) = E'(x) - K'(x) = 20$ CHF

b)
i) $K'(x) = (10x + 20)$ CHF
ii) $E'(x) = (-4x + 100)$ CHF
iii) $G'(x) = E'(x) - K'(x) = (-14x + 80)$ CHF

c)
i) $K'(x) = (40x + 12e^{4x})$ CHF
ii) $E'(x) = \left(200 + 8x\, e^{-4x^2}\right)$ CHF
iii) $G'(x) = E'(x) - K'(x) = \left(-40x + 200 - 12e^{4x} + 8x\, e^{-4x^2}\right)$ CHF

R2.4 a)
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
$f''(x) = 12x - 18$
$f'''(x) = 12$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$
$f''(x_1) = -6 < 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ lokales Maximum bei $x_1 = 1$
$f''(x_2) = 6 > 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ lokales Minimum bei $x_2 = 2$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{3}{2}$
$f'''(x_3) = 12 \neq 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ Wendepunkt bei $x_3 = \frac{3}{2}$

b) (siehe nächste Seite)

b) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1) = 4x^4 - 4x^2$
$f'(x) = 16x^3 - 8x$
$f''(x) = 48x^2 - 8$
$f'''(x) = 96x$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f''(x_1) = -8 < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_1 = 0$
$f''(x_2) = 16 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$f''(x_3) = 16 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ und $x_5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$
$f'''(x_4) = \frac{96}{\sqrt{6}} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}$
$f'''(x_5) = -\frac{96}{\sqrt{6}} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

R2.5 **Lokales** Maximum bei $x = 1800$ liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \le x \le 1500$.
$E(1500) = 31'500$ CHF $> E(0) = 0$ CHF
$\Rightarrow$ $E = 31'500$ CHF ist der **globale** maximale Ertrag bei $x = 1500$.

R2.6 $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \left(x + \frac{100}{x}\right)$ CHF
$\overline{K}(x)$ hat ein **lokales** Minimum bei $x_1 = 10$.
$\overline{K}(10) = 20$ CHF
$\overline{K}(x) > \overline{K}(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein lokales Maximum gibt.
$\Rightarrow$ $\overline{K} = 20$ CHF sind die **globalen** minimalen Durchschnittskosten bei $x = 10$.

R2.7 $G(x) = E(x) - K(x) = \left(-\frac{1}{100}x^2 + 50x - 300\right)$ CHF
$G(x)$ hat ein **lokales** Maximum bei $x_1 = 2500$. Dieses liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \le x \le 1000$.
$G(1000) = 39'700$ CHF $> G(0) = -300$ CHF
$\Rightarrow$ $G = 39'700$ CHF ist der **globale** maximale Gewinn am Endpunkt $x = 1000$.

R2.8 a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6)\, dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 6x + C$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right) dx = \frac{1}{14}x^7 + \frac{2}{9x^3} + C$

R2.9 $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x + 2$

R2.10 $K(20) = 2000$ CHF

Hinweis:
- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ $\Rightarrow$ $K(x) = \left(\frac{5}{2}x^2 + 10x + 800\right)$ CHF

R2.11 (siehe nächste Seite)

R2.11 G = 800 CHF ist der globale maximale Gewinn bei x = 15 Einheiten.

Hinweise:
- Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion K(x) $\Rightarrow$ $K(x) = (3x^2 + 60x + 100)$ CHF
- Bestimmen Sie die Durchschnittsertragsfunktion $\overline{E}(x)$ $\Rightarrow$ $\overline{E}(x) = (-x + C)$ CHF
- Bestimmen Sie die Ertragsfunktion E(x) $\Rightarrow$ $E(x) = (-x^2 + 180x)$ CHF
- Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G(x) $\Rightarrow$ $G(x) = (-4x^2 + 120x - 100)$ CHF
- Die Gewinnfunktion G(x) ist eine quadratische Funktion.
- Denken Sie an den Grafen der Gewinnfunktion, wenn Sie das globale Maximum bestimmen.

R2.12 Gleichgewichtsmenge
x = 5

Gleichgewichtspreis
p = 24 CHF

Konsumentenrente
CS = 83.33 CHF (gerundet)

Produzentenrente
PS = 50 CHF

R2.13 a = 1
b = 0.2