Repetitions-Aufgaben 1 Funktionen und Gleichungen

Aufgaben

R1.1 Beurteilen Sie mit Begründung, welche der folgenden Zuordnungen Funktionen sind.

a) $f_1 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+,\ x \mapsto y = f_1(x) = \sqrt{x}$

b) $f_2 : \{2, 3, 4, ...\} \rightarrow \mathbb{N},\ x \mapsto y = f_2(x) = x - 1$

c) D = Menge aller Schweizer Kantone
B = Menge aller Schweizer Ortschaften und Städte
$f_3 : D \rightarrow B,\ x \mapsto y = f_3(x) =$ Hauptort von x

d) $f_4 : \{x: x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 3\} \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto y = f_4(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

e) $f_5 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto y = f_5(x) = \log_a(x)$

R1.2 Falls $f(x) = 9x - x^2$, bestimmen Sie ...

a) ... f(0).

b) ... f(-3).

c) ... $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ und vereinfachen Sie den Ausdruck.

R1.3 Lösen Sie die folgenden Gleichungen, und geben Sie die Lösungsmengen an:

a) $3x - 8 = 23$

b) $\frac{6}{3x - 5} = \frac{6}{2x + 3}$

c) $\frac{2x + 5}{x + 7} = \frac{1}{3} + \frac{x - 11}{2x + 14}$

R1.4 Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x, und geben Sie die Lösungsmengen an.
Berücksichtigen Sie dabei, dass die Parameter a und p beliebige reelle Zahlen sein können.

a) $ax = 60$

b) $(p - 1)px = p^2 - 1$

R1.5 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme, und geben Sie die Lösungsmengen an:

a) $2x + y = 19$
$x - 2y = 12$

b) $6x + 3y = 1$
$y = - 2x + 1$

R1.6 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion, deren Graf ...

a) … die Steigung 4 und den Achsenabschnitt 2 hat.

b) … durch den Punkt (-2|1) verläuft und die Steigung $\frac{2}{5}$ hat.

c) … (siehe nächste Seite)

c) ... durch die Punkte (-2|7) und (6|-4) verläuft.

d) ... durch den Punkt (1|6) verläuft und parallel ist zu y = 4x - 6.

R1.7 Ein bestimmtes Produkt hat die folgenden Angebots- und Nachfragefunktionen:

$p = f_A(q) = (4q + 5)$ CHF
$p = f_N(q) = (-2q + 81)$ CHF

a) Bestimmen Sie sowohl die angebotene als auch die nachgefragte Menge, falls der Preis 53 CHF beträgt.

b) Bestimmen Sie sowohl die Gleichgewichtsmenge als auch den Gleichgewichtspreis.

R1.8 Die Gesamtkosten K(x) und der Ertrag E(x) sind für ein bestimmtes Produkt wie folgt gegeben:

$K(x) = (38.80x + 4500)$ CHF
$E(x) = 61.30x$ CHF

a) Bestimmen Sie die Fixkosten.

b) Bestimmen Sie die variablen Kosten für die Fertigung von 10 Stück.

c) Bestimmen Sie, welche Anzahl gefertigt werden muss, um die Gewinnschwelle zu erreichen.

R1.9 Die Angebots- und die Nachfragefunktion für ein Produkt seien linear und durch die folgenden Tabellen bestimmt:

Angebotsfunktion		**Nachfragefunktion**	
Preis	**Menge**	**Preis**	**Menge**
100 CHF	200	200 CHF	200
200 CHF	400	100 CHF	400
300 CHF	600	0 CHF	600

Bestimmen Sie die Menge und den Preis bei Marktgleichgewicht.

R1.10 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $4x - 3x^2 = 0$

b) $3x^2 - 6x = 9$

c) $4x^2 + 25 = 0$

d) $\frac{1}{x} + 2x = \frac{1}{3} + \frac{x+1}{x}$

e) $\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x^2-5x}$

R1.11 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion, deren Graf ...

a) ... den Scheitelpunkt (2|4) hat und durch (3|3) verläuft.

b) ... durch (-3|-3), (0|3) und (3|0) verläuft.

R1.12 Die Angebotsfunktion für ein Produkt ist gegeben durch $p = (q^2 + 300)$ CHF und die Nachfragefunktion durch $p/\text{CHF} + q = 410$.

Bestimmen Sie die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis.

R1.13 Angenommen, die Gesamtkosten K(x) für eine Dienstleistung seien gegeben durch $K(x) = (1760 + 8x + 0.6x^2)$ CHF und der Ertrag E(x) durch $E(x) = (100x - 0.4x^2)$ CHF.

Bestimmen Sie die Gewinnschwellen.

R1.14 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion, deren Graf durch die Punkte P und Q verläuft.

a) P(0|1) Q(2|9)

b) P(1|20) Q(2|100)

R1.15 Berechnen Sie die folgenden Logarithmen ohne Taschenrechner:

a) $\log_5(1)$

b) $\log_2(8)$

c) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$

d) $\log_3(3^8)$

e) $e^{\ln(5)}$

f) $10^{\lg(3.15)}$

R1.16 8000 CHF werden bei einfacher Verzinsung und einem Jahreszinssatz von 12% 3 Jahre lang ausgeliehen.

Bestimmen Sie den Wert der Anleihe nach Ablauf der 3 Jahre.

R1.17 Maria hat sich von ihren Eltern 2000 CHF ausgeliehen und ihnen nach 4 Jahren 2200 CHF zurückgezahlt.

Bestimmen Sie, zu welchem jährlichen Zinssatz Maria das Geld bei einfacher Verzinsung ausgeliehen hat.

R1.18 Ein künftiger Student möchte Geld auf ein Konto einzahlen, um 3 Jahre später über 3000 CHF für Studiengebühren zu verfügen. Das Geld wird bei jährlicher einfacher Verzinsung zu einem Jahreszinssatz von 6% angelegt.

Bestimmen Sie den Geldbetrag, den der künftige Student einzahlen muss.

R1.19 Angenommen, 1000 CHF werden 4 Jahre lang bei vierteljährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 8% angelegt.

Bestimmen Sie, wieviel Zins das Geld in den 4 Jahren trägt.

R1.20 Eine Investition wird monatlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 5.4% verzinst. In 4 Jahren möchte man 18'000 CHF haben.

Bestimmen Sie den Geldbetrag, der investiert werden muss.

R1.21 Im Jahr 2010 hatte ein afrikanisches Land 4.5 Millionen Einwohner. Die Bevölkerung ist seither 4% pro Jahr gewachsen.

Bestimmen Sie, wie gross die Bevölkerung im Jahr 2030 sein wird, wenn sich der Wachstumsfaktor nicht verändert.

R1.22 Ein Unternehmen möchte in 4 1/2 Jahren 250'000 CHF für Investitionen zur Verfügung haben. Das investierte Geld wird vierteljährlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 10.2% verzinst.

Bestimmen Sie, wieviel zu Beginn jedes Quartals einbezahlt werden muss, um das genannte Ziel zu erreichen.

R1.23 Ein Altersvorsorgekonto, welches halbjährlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6.8% verzinst wird, enthält 488'000 CHF.

Bestimmen Sie, wie lange am Ende jedes Halbjahres 40'000 CHF abgehoben werden können, bis der Kontostand 0 CHF ist.

R1.24 In 3 Jahren möchte ein Paar eine 4-monatige Reise nach China, Japan und Südostasien antreten. Ab Reisebeginn möchte es jeweils zu Monatsbeginn 5000 CHF abheben, um die Reisekosten für den entsprechenden Monat bezahlen zu können. Es wird angenommen, dass das Konto monatlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6.6% verzinst wird.

Bestimmen Sie, wieviel das Paar ab jetzt 3 Jahre lang zu Beginn jedes Monats einzahlen muss, damit bei Reisebeginn genügend Geld auf seinem Konto liegt.

R1.25 Herr S. muss seiner geschiedenen Frau 8 Jahre lang am Ende jedes Jahres 25'000 CHF bezahlen. Aufgrund eines privaten Gewinns in seiner Firma ist er in der Lage, die ganze Summe bereits am Ende des ersten Jahres zu bezahlen (statt in 8 Raten am Ende jedes Jahres). Angenommen, es wurde eine jährliche Verzinsung mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 4.5% vereinbart.

Bestimmen Sie den Betrag, welchen Herr S. am Ende des ersten Jahres bezahlen muss.

R1.26 Herr P. denkt über eine Anlage für seine Altersvorsorge nach. Er möchte ab dem Jahr, in welchem er 60 Jahre alt wird, 15 Jahre lang jeweils am Jahresende von einem Konto 8000 CHF abheben können. Er nimmt an, dass das Geld während dieser 15 Jahre jährlich mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 2.5% verzinst wird.

a) Herr P. möchte das Geld sparen, indem er 30 gleiche Raten am Ende jedes Jahres einzahlt, und zwar bis zum Jahr, in welchem er 55 Jahre alt wird. Er nimmt an, dass das Geld jährlich mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 3% verzinst wird und dass der Zinssatz von 3% dann weiter gilt bis zum Jahr, in welchem er 60 Jahre alt wird.

   Bestimmen Sie, wieviel Herr P. jedes Jahr einzahlen muss.

b) Herr P. hat im Lotto 40'000 CHF gewonnen! Angenommen, er zahlt das Geld am Ende des Jahres ein, in welchem er 25 Jahre alt wird, und es gilt die gleiche Verzinsung wie in a).

   Beurteilen Sie mit Begründung, ob dieses Geld für seine Altersvorsorge reichen würde.

Lösungen

R1.1 a) keine Funktion
f ist nicht definiert für $x = 0$ (obwohl $0 \in \mathbb{R}_0^+$), da $y = f(0) = 0 \notin \mathbb{R}^+$

b) Funktion

c) Funktion

d) keine Funktion
f ist nicht definiert für $x = 3$.

e) keine Funktion
f ist nicht definiert für $x = 0$.

Hinweise:
- Eine Funktion muss für jedes Element der Definitionsmenge definiert sein.
- Eine Funktion muss eindeutig sein, d.h. jedem Element der Definitionsmenge wird nur ein Element (nicht mehrere Elemente) der Zielmenge zugeordnet.

R1.2 a) $f(0) = 0$

b) $f(-3) = -36$

c) $f(x+h) = 9(x+h) - (x+h)^2$

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 9 - 2x - h$

R1.3 a) $L = \left\{\frac{31}{3}\right\}$

b) $L = \{8\}$

Hinweis:
- Bringen Sie zuerst die Brüche weg, indem Sie mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner multiplizieren.

c) $L = \{\}$

Hinweise:
- Gehen Sie gleich vor wie in b).
- Wegen der Nenner $x + 7$ und $2x + 14$ in der ursprünglichen Gleichung kann -7 keine Lösung sein.

R1.4 a)

falls $a = 0$:	keine Lösung	$\Rightarrow$	$L = \{\ \}$
falls $a \neq 0$:	$x = \frac{60}{a}$	$\Rightarrow$	$L = \left\{\frac{60}{a}\right\}$

b)

falls $p = 0$:	keine Lösung	$\Rightarrow$	$L = \{\ \}$
falls $p = 1$:	$x \in \mathbb{R}$	$\Rightarrow$	$L = \mathbb{R}$
falls $p \neq 0$ und $p \neq 1$:	$x = \frac{p+1}{p}$	$\Rightarrow$	$L = \left\{\frac{p+1}{p}\right\}$

Hinweise:
- Eine Divison durch 0 ist nicht definiert.
- Eine Division durch eine Zahl, welche den Parameter a oder p enthält, benötigt eine Fallunterscheidung.

R1.5 a) $(x, y) = (10, -1)$
$L = \{(10, -1)\}$

b) (siehe nächste Seite)

b) L = { }

Hinweise:
- Lösen Sie zuerst eine Gleichung nach y (oder x).
- Setzen Sie den Ausdruck für y (oder x) in die andere Gleichung ein.
- Lösen Sie die Gleichung nach x (oder y).

R1.6 a) $y = f(x) = 4x + 2$

b) $y = f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$

c) $y = f(x) = -\frac{11}{8}x + \frac{17}{4}$

d) $y = f(x) = 4x + 2$

Hinweise:
- Geben Sie zuerst die allgemeine Form der Funktionsgleichung einer linearen Funktion an.
- Bestimmen Sie die beiden Parameter (a und b) der Gleichung, indem Sie ein Gleichungssystem aufstellen.
- Ein Punkt liegt genau dann auf dem Graf einer Funktion, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

R1.7 a) 12 angeboten, 14 nachgefragt

b) $f_A(q) = f_N(q)$ für $q = \frac{38}{3} = 12.6... \notin \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ kein genaues Gleichgewicht $\rightarrow$ $q = 13$, $f_A(13) = 57$ CHF, $f_N(13) = 55$ CHF

R1.8 a) 4500 CHF

b) 388 CHF

c) $K(x) = E(x)$ für $x = 200$

R1.9 Angebotsfunktion: $f_A(q) = \frac{1}{2}q$ CHF
Nachfragefunktion: $f_N(q) = \left(-\frac{1}{2}q + 300\right)$ CHF
Marktgleichgewicht: $f_A(q) = f_N(q)$ für $q = 300$ und $p = 150$ CHF

R1.10 a) L = {0, 4/3}

Hinweise:
- Faktorisieren Sie die linke Seite der Gleichung (Faktor x).
- Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist.

b) L = {-1, 3}

Hinweis:
- Verwenden Sie die Lösungsformel.

c) L = { }

Hinweise:
- Lösen Sie zuerst nach x^2.
- Das Quadrat jeder reellen Zahl ist gleich 0 oder grösser als 0.

d) (siehe nächste Seite)

d) $L = \{2/3\}$

Hinweise:
- Bringen Sie zuerst die Brüche weg, indem Sie mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner (= 3x) multiplizieren.
- Die Brüche $\frac{1}{x}$ und $\frac{x+1}{x}$ sind für x = 0 nicht definiert. Daher kann x = 0 keine Lösung sein.

e) (gleiche Gleichung wie in der Aufgabe 7.6 c))

$L = \{-3\}$

Hinweise:
- Bringen Sie zuerst die Brüche weg, indem Sie mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner (= x (x - 5)) multiplizieren.
- Die Brüche in der ursprünglichen Gleichung sind für x = 5 nicht definiert. Daher kann x = 5 keine Lösung sein.

R1.11 a) $y = f(x) = -(x-2)^2 + 4$

b) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

Hinweise:
- Geben Sie zuerst die Funktionsgleichung einer allgemeinen quadratischen Funktion an.
- Verwenden Sie in a) die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung.
- Verwenden Sie in b) die allgemeine Form der Funktionsgleichung.
- Bestimmen Sie die Parameter in der Gleichung, indem Sie ein Gleichungssystem aufstellen.
- Ein Punkt liegt genau dann auf dem Graf einer Funktion, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

R1.12 Angebotsfunktion: $f_A(q) = (q^2 + 300)$ CHF
Nachfragefunktion: $f_N(q) = (-q + 410)$ CHF

Marktgleichgewicht: $f_A(q) = f_N(q)$ für q = 10 und p = 400 CHF

R1.13 $K(x) = E(x)$
$x_1 = 46 + 2\sqrt{89} = 64.9$ (gerundet)
$x_2 = 46 - 2\sqrt{89} = 27.1$ (gerundet)

R1.14 a) $y = f(x) = 3^x$

b) $y = f(x) = 4 \cdot 5^x$

Hinweise:
- Geben Sie zuerst die Funktionsgleichung einer allgemeinen Exponentialfunktion an.
- Bestimmen Sie die Parameter in der Gleichung, indem Sie ein Gleichungssystem aufstellen.
- Ein Punkt liegt genau dann auf dem Graf einer Funktion, wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

R1.15 a) 0

b) 3

c) - 1

d) (siehe nächste Seite)

d) 8

Hinweis:
- Der Ausdruck $\log_a(x)$ ist die Antwort auf die Frage "a hoch wieviel ist gleich x?"

e) 5

f) 3.15

Hinweis:
- Benützen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt: $a^{\log_a(x)} = x$

R1.16 Einfacher Zins

$K_n = K_0(1 + nr)$ mit $K_0 = 8000$ CHF, $r = 12\%$, $n = 3$

$\Rightarrow K_3 = 10'880$ CHF

R1.17 Einfacher Zins

$i = \frac{\frac{K_n}{K_0} - 1}{n}$ mit $K_0 = 2000$ CHF, $K_n = 2200$ CHF, $n = 4$

$\Rightarrow i = 2.5\%$

R1.18 Einfacher Zins

$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$ mit $K_n = 3000$ CHF, $i = 6\%$, $n = 3$

$\Rightarrow K_0 = 2542.37$ CHF (gerundet)

R1.19 Zinseszins

$K_n = K_0 (1 + i)^n$ mit $K_0 = 1000$ CHF, $i = \frac{8\%}{4} = 2\%$, $n = 4 \cdot 4 = 16$

$\Rightarrow K_n - K_0 = 372.79$ CHF (gerundet)

R1.20 Zinseszins

$K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$ mit $K_n = 18'000$ CHF, $i = \frac{5.4\%}{12}$, $n = 12 \cdot 4 = 48$

$\Rightarrow K_0 = 14'510.26$ CHF (gerundet)

R1.21 9.86 Millionen (gerundet)

Hinweise:
- Die Bevölkerung wächst exponentiell.
- Geben Sie die Funktionsgleichung einer allgemeinen Exponentialfunktion an.
- Bestimmen Sie sowohl den Anfangswert als auch den Wachstumsfaktor.

Detailliertere Lösung:
- $y = f(x) = c \cdot a^x$
- Anfangswert (Bevölkerung im Jahr 2010): $c = f(0) = 4'500'000$
- Wachstumsfaktor $a = 1 + 4\% = 1.04$
- Bevölkerung im Jahr 2030: $f(20) = 4'500'000 \cdot 1.04^{20} = 9.86$ Millionen (gerundet)

R1.22 Vorschüssige Rente

$r = \frac{R_n(q-1)}{q(q^n-1)}$ mit $R_n = 250'000$ CHF, $q = 1 + \frac{10.2\%}{4}$, $n = 4.5 \cdot 4 = 18$

$\Rightarrow$ r = 10'841.24 CHF (gerundet)

R1.23 Nachschüssige Rente

$n = \frac{\lg\left(\frac{r}{r - R_0(q-1)}\right)}{\lg(q)}$ mit $R_0 = 488'000$ CHF, r = 40'000 CHF, $q = 1 + \frac{6.8\%}{2}$

$\Rightarrow$ n = 16.02... $\rightarrow$ 16 Halbjahre = 8 Jahre

R1.24 2 Renten: 3 Jahre ab jetzt (Geld einzahlen), 4 Monate (Geld abheben)

- 4 Monate (Geld abheben): Vorschüssige Rente

$R_0 = r\,\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$ mit r = 5000 CHF, $q = 1 + \frac{6.6\%}{12}$, n = 4

$\Rightarrow$ R_0 = 19'836.49… CHF

- 3 Jahre ab jetzt (Geld einzahlen): Vorschüssige Rente

$r = \frac{R_n(q-1)}{q(q^n-1)}$ mit R_n = … (= R_0 bei erster Rente), $q = 1 + \frac{6.6\%}{12}$, n = 36

$\Rightarrow$ r = 497.04 CHF (gerundet)

R1.25 Die ganze Summe, die Herr S. am Ende des ersten Jahres einzahlt, trägt Zins. Das Kapital am Ende des 8. Jahres muss dasselbe sein wie der Wert, den die Rente hätte, falls Herr S. 8-mal am Ende jedes Jahres eine Zahlung tätigen würde.

- Nachschüssige Rente

$R_n = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$ mit r = 25'000 CHF, q = 1 + 4.5%, n = 8

$\Rightarrow$ R_n = 234'500.34… CHF

- Zinseszins

$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$ mit K_n = … (= R_n bei der Rente), i = 4.5%, n = 7

$\Rightarrow$ K_0 = 172'317.53 CHF (aufgerundet)

R1.26 a) - Nachschüssige Rente (Alter 60 bis 75)

$R_0 = r\,\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$ mit r = 8000 CHF, q = 1 + 2.5%, n = 15

$\Rightarrow$ R_0 = 99'051.02… CHF

- Zinseszins (Alter 55 bis 60)

$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$ mit K_n = … (= R_0 bei Rente Alter 60 bis 75), i = 3%, n = 5

$\Rightarrow$ K_0 = 85'442.28… CHF

- Nachschüssige Rente (Alter 25 bis 55)

$r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$ mit R_n = … (= K_0), q = 1 + 3%, n = 30

$\Rightarrow$ r = 1795.93 CHF

b) Zinseszins (Alter 25 bis 60)

$K_n = K_0\,(1 + i)^n$ mit K_0 = 40'000 CHF, i = 3%, n = 35

⇒ K_n = 112'554.50 CHF (gerundet) > … (= R_0 bei Rente Alter 60 bis 75)

⇒ Der Betrag reicht für seine Altersvorsorge.