

Aufgaben 15

Bestimmtes Integral

Bestimmtes Integral, Fläche unter einer Kurve, Konsumenten-/ Produzentenrente

Lernziele

- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden können.
- ein bestimmtes Integral einer konstanten Funktion, einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- den Flächeninhalt zwischen dem Grafen einer elementaren Potenzfunktion und der Abszissenachse bestimmen können.
- eine Konsumenten- und Produzentenrente bestimmen können, wenn die Nachfrage- und Angebotsfunktion elementare Potenzfunktionen sind.

Aufgaben

15.1 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_3^4 (2x - 5) dx$	b) $\int_0^1 (x^3 + 2x) dx$	c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx$
d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx$	e) $\int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{8}x^4 + 2x^2\right) dx$	f) $\int_{-1}^1 e^x dx$
g) $\int_0^1 e^{2x} dx$	h) $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx$	

15.2 Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Grafen der Funktion f und der x -Achse im Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x -Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$.

a) $f(x) = -x^2 + 1$ b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Stellen x , wo der Graf von f die x -Achse berührt oder schneidet, d.h. wo $f(x) = 0$
- Bestimmen Sie dann das Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x -Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$

15.3 Die Nachfragefunktion für ein Produkt ist $p = f_N(x) = (100 - 4x^2)$ CHF. Die Gleichgewichtsmenge beträgt 4 Einheiten.

Bestimmen Sie die Konsumentenrente.

15.4 Die Nachfragefunktion für ein Produkt ist $p = f_N(x) = (34 - x^2)$ CHF. Der Gleichgewichtspreis beträgt 9 CHF.

Bestimmen Sie die Konsumentenrente.

15.5 Angenommen, die Angebotsfunktion für eine Ware oder Dienstleistung ist $p = f_A(x) = (4x^2 + 2x + 2)$ CHF, und der Gleichgewichtspreis beträgt 422 CHF.

Bestimmen Sie die Produzentenrente.

15.6 (siehe nächste Seite)

- 15.6 Die Angebotsfunktion f_A und die Nachfragefunktion f_N für ein bestimmtes Produkt oder eine bestimmte Dienstleistung lauten wie folgt:

$$p = f_A(x) = (x^2 + 4x + 11) \text{ CHF}$$

$$p = f_N(x) = (81 - x^2) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie ...

- a) ... das Marktgleichgewicht, d.h. die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis.
- b) ... die Konsumentenrente.
- c) ... die Produzentenrente.

- 15.7 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Das bestimmte Integral einer Funktion ist ...

- ... eine reelle Zahl.
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.

- b) $\int_a^b f(x) dx$...

- ... $= f(b) - f(a)$
- ... $= F(a) - F(b)$ wobei F eine Stammfunktion von f ist.
- ... ist gleich dem Flächeninhalt zwischen dem Grafen von f und der x -Achse auf dem Intervall $a \leq x \leq b$ falls $f(x) \geq 0$ auf dem Intervall $a \leq x \leq b$.
- ... kann nicht berechnet werden, wenn nicht alle Stammfunktionen von f bekannt sind.

- c) Die Konsumentenrente ist ein Flächeninhalt zwischen ...

- ... den Grafen von Nachfrage- und Angebotsfunktion.
- ... der x -Achse und dem Grafen der Nachfragefunktion.
- ... dem Grafen der Nachfragefunktion und der horizontalen Linie "Preis = Gleichgewichtspreis".
- ... der horizontalen Linie "Preis = Gleichgewichtspreis" und dem Grafen der Angebotsfunktion.

Lösungen

15.1 a) $\int_3^4 (2x - 5) dx = \left[2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 5x \right]_3^4 = [x^2 - 5x]_3^4 = (4^2 - 5 \cdot 4) - (3^2 - 5 \cdot 3) = 2$

b) $\int_0^1 (x^3 + 2x) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \left[\frac{1}{4} x^4 + x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} 1^4 + 1^2 \right) - \left(\frac{1}{4} 0^4 + 0^2 \right) = \frac{5}{4}$

c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 - 4x \right]_{-5}^{-3} = \left[\frac{1}{6} x^3 - 4x \right]_{-5}^{-3} = \left(\frac{1}{6} (-3)^3 - 4 \cdot (-3) \right) - \left(\frac{1}{6} (-5)^3 - 4 \cdot (-5) \right) = \frac{25}{3}$

d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x - 4 \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 4x \right]_2^4 = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 4x \right]_2^4 = \left(\frac{1}{4} 4^4 - \frac{1}{6} 4^3 + \frac{3}{2} 4^2 - 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{4} 2^4 - \frac{1}{6} 2^3 + \frac{3}{2} 2^2 - 4 \cdot 2 \right) = \frac{182}{3}$

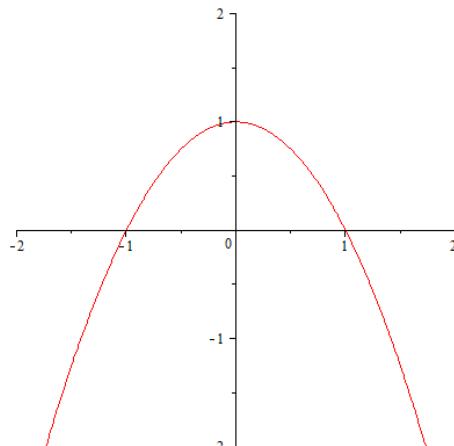
e) $\int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{8} x^4 + 2x^2 \right) dx = \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{5} x^5 + 2 \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^2 = \left[-\frac{1}{40} x^5 + \frac{2}{3} x^3 \right]_{-2}^2 = \left(-\frac{1}{40} 2^5 + \frac{2}{3} 2^3 \right) - \left(-\frac{1}{40} (-2)^5 + \frac{2}{3} (-2)^3 \right) = \frac{136}{15}$

f) $\int_{-1}^1 e^x dx = [e^x]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$

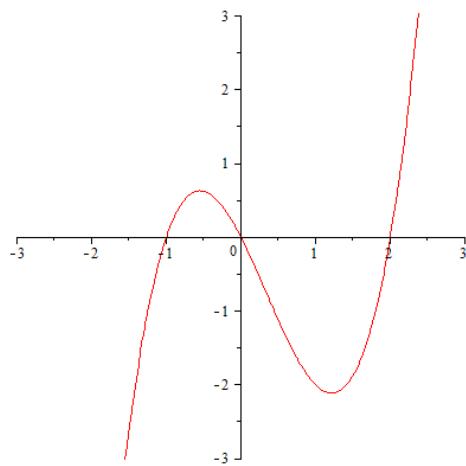
g) $\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} [e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2} (e^{2 \cdot 1} - e^{2 \cdot 0}) = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$

h) $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} [e^{-3x}]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} (e^{-3 \cdot 1} - e^{-3 \cdot (-1)}) = -\frac{1}{3} (e^{-3} - e^3) = \frac{1}{3} (e^3 - \frac{1}{e^3})$

15.2 a) $A = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$



b) $A = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{5}{12}$



15.3 Konsumentenrente
 $CS = 170.67 \text{ CHF}$ (gerundet)

15.4 Konsumentenrente
 $CS = 83.33 \text{ CHF}$ (gerundet)

15.5 Produzentenrente
 $PS = 2766.67 \text{ CHF}$ (gerundet)

15.6 a) Gleichgewichtsmenge
 $x = 5$
Gleichgewichtspreis
 $p = 56 \text{ CHF}$
b) Konsumentenrente
 $CS = 83.33 \text{ CHF}$ (gerundet)
c) Produzentenrente
 $PS = 133.33 \text{ CHF}$ (gerundet)

15.7 a) 1. Aussage
b) 3. Aussage
c) 3. Aussage