

Aufgaben 13 Anwendungen der Differentialrechnung Lokale/Globale Maxima/Minima, Wendepunkte

Lernziele

- die lokalen Maxima und Minima einer Funktion bestimmen können.
- die Wendepunkte einer Funktion bestimmen können.
- das globale Maximum und das globale Minimum einer Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können.
- das globale Minimum einer Durchschnittskostenfunktion bestimmen können.

Aufgaben

13.1 Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die gegebene Funktion ...

- i) ... ein lokales Maximum hat.
 ... ein lokales Minimum hat.
- ii) ... einen Wendepunkt hat.
- a) $f(x) = x^2 - 4$
- b) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$
- c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$
- d) $f(x) = x e^{-x}$
- e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2$
- f) * $V(r) = -D \left(\frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (D > 0, a > 0)$

13.2 Angenommen, der Gesamtgewinn bei der Herstellung und dem Verkauf einer Ware beträgt

$$G(x) = (2000x + 20x^2 - x^3) \text{ CHF}$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die Stückzahl x bei maximalem Gewinn, und bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die lokalen Maxima.
- Prüfen Sie dann nach, ob eines der lokalen Maxima das globale Maximum ist.

13.3 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Dienstleistung eines Transport- und Logistik-Unternehmens sind gegeben durch

$$K(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 4x + 100 \right) \cdot 100 \text{ CHF}$$

wobei x ein Mass für den Umfang der Dienstleistung ist.

Bestimmen Sie den Wert für x , welcher zu minimalen Durchschnittskosten führt.

Bestimmen Sie auch diese minimalen Durchschnittskosten.

13.4 Angenommen, die Produktionskapazität für eine bestimmte Ware kann 30 nicht überschreiten. Der Gesamtgewinn dieser Firma ist

$$G(x) = (4x^3 - 210x^2 + 3600x) \text{ CHF}$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die Stückzahl x , welche den Gewinn maximiert.

- 13.5 Angenommen, der jährliche Gewinn eines Geschäfts ist gegeben durch

$$G(x) = (-0.1x^3 + 3x^2) \cdot 1000 \text{ CHF}$$

wobei x die Anzahl Jahre nach 2010 ist.

Bestimmen Sie den Wendepunkt für den Gewinn.

- 13.6 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Falls f ein lokales Maximum bei x_0 hat, kann gefolgert werden, dass ...

- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x \neq x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x > x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x < x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0

- b) Falls $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, kann gefolgert werden, dass f ...

- ☐ ... kein lokales Minimum bei x_0 hat.
- ☐ ... kein lokales Maximum bei x_0 hat.
- ☐ ... keinen Wendepunkt bei x_0 hat.
- ☐ ... einen Wendepunkt bei x_0 hat.

- c) Das globale Maximum einer Funktion ...

- ☐ ... ist immer ein lokales Maximum.
- ☐ ... kann ein lokales Minimum sein.
- ☐ ... kann ein lokales Maximum sein.
- ☐ ... existiert immer.