

## Aufgaben 10      Exponentialfunktion und -gleichungen Nachschüssige Rente, Vorschüssige Rente

### Lernziele

- den Anfangs- und den Endwert einer Rente berechnen können, falls konstante Zahlungen am Anfang oder am Ende jeder Zinsperiode getätigt werden.
- ausgewählte Rentenprobleme bearbeiten können.

### Aufgaben

#### *Nachschüssige Rente*

- 10.1    Bei einer nachschüssigen Rente werden 5 Jahre lang am Ende jedes Jahres 1300 CHF eingezahlt. Das Geld wird jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszinssatz von 6% verzinst.

Bestimmen Sie den Wert der Rente nach den 5 Jahren.

- 10.2    Die Formel

$$R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wird verwendet, um den Endwert  $R_n$  einer nachschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach  $r$  und  $n$ .

- 10.3    Angenommen, 2500 CHF werden am Ende jedes Quartals auf ein Konto eingezahlt, wobei vierteljährlich mit Zinseszins und einem nominellen Jahreszinssatz von 5% verzinst wird.

Bestimmen Sie, nach wievielen Quartalen auf dem Konto 80'000 CHF liegen.

- 10.4    Nehmen Sie an, dass Geld auf einem Konto jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszins von 1.5% verzinst wird. Man möchte nach 10 Jahren 20'000 CHF haben.

- Bestimmen Sie, welcher Betrag am Ende jedes Jahres eingezahlt werden muss.
- Bestimmen Sie, welchen Betrag man zu Beginn einzahlen müsste, falls während der ganzen Zeit keine weiteren Zahlungen mehr getätigt würden.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse in a) und b). Erklären Sie, warum die Zahlung in b) kleiner ist als die Summe aller 10 Zahlungen in a).

- 10.5    Zwei Zwillinge sind 23 Jahre alt und haben verschiedene Anlagestrategien.

Der Zwilling 1 zahlt 10 Jahre lang am Ende jedes Jahres 2000 CHF auf ein Konto ein. Danach macht er keine Zahlungen mehr, bis er 65 Jahre alt ist.

Der Zwilling 2 hingegen wartet mit seiner Investition, bis er 40 Jahre alt ist. Dann zahlt er in den darauffolgenden 25 Jahren am Ende jedes Jahres einen bestimmten Betrag auf ein Konto ein.

Angenommen, das von beiden Zwillingen eingezahlte Geld wird während der ganzen Zeit jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszinssatz von 8% verzinst.

Bestimmen Sie den Betrag, den der Zwilling 2 jährlich (von Alter 40 bis Alter 65) einzahlen muss, damit er mit 65 Jahren gleich viel Geld hat wie der Zwilling 1.

Hinweis:

- Zeichnen Sie ein Diagramm, welches die Anlagestrategien der beiden Zwillinge im zeitlichen Verlauf darstellt.

- 10.6 Bei einer Rente können 8 Jahre lang am Ende jedes Halbjahres 6000 CHF ausbezahlt werden, und das Geld wird halbjährlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 8% verzinst.

Bestimmen Sie den Anfangswert der Rente.

- 10.7 Die Formel

$$R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

wird verwendet, um den Anfangswert  $R_0$  einer nachschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach  $r$  und  $n$ .

- 10.8 Der Anfangswert einer Rente beträgt 135'000 CHF, und das Geld wird vierteljährlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 6.4% verzinst.

Bestimmen Sie, wieviel Geld 10 Jahre lang am Ende jedes Quartals abgehoben werden kann.

- 10.9 Ein Konto, welches als zusätzliche Altersvorsorge dienen soll, enthält 242'000 CHF. Nehmen Sie an, dass 200'000 CHF für eine Rente verwendet werden sollen, welche vierteljährlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 6% verzinst wird und bei welcher am Ende jedes Quartals 4500 CHF abgehoben werden sollen.

Bestimmen Sie, wie lange es geht, bis der Kontostand 0 CHF ist.

#### *Vorschüssige Rente*

- 10.10 Die beiden Formeln

$$R_n = rq \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{und} \quad R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)}$$

werden verwendet, um den Endwert  $R_n$  oder den Anfangswert  $R_0$  einer vorschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie beide Formeln nach  $r$  und  $n$ .

- 10.11 Bei einer vorschüssigen Rente werden 2.5 Jahre lang vierteljährlich 100 CHF eingezahlt. Das Geld wird vierteljährlich mit Zinseszins bei einem Jahreszinssatz von 12% verzinst.

Bestimmen Sie den Wert der Rente nach den 2.5 Jahren.

- 10.12 Ein Konto wird jährlich mit Zinseszins und einem Jahreszinssatz von 8% verzinst und soll nach 5 Jahren 24'000 CHF enthalten.

Bestimmen Sie, wieviel zu Beginn jedes Jahres auf das Konto eingezahlt werden muss.

- 10.13 Angenommen, ein Konto, welches vierteljährlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 5% verzinst wird, enthalte am Anfang 80'000 CHF. Zu Beginn jedes Quartals werden 2500 CHF abgehoben.

Bestimmen Sie, nach wievielen Quartalen das Konto 0 CHF enthalten wird.

- 10.14 Eine Rente soll in den nächsten 12 Jahren jeweils zu Jahresbeginn Auszahlungen von 50'000 CHF generieren, wenn das Geld jährlich mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 5.92% verzinst wird.

Bestimmen Sie die Geldmenge, welche jetzt zur Seite gelegt werden muss.

- 10.15 Ein einmaliger, am Jahresende ausbezahlter Bonus von 25'000 CHF soll als Rente am Anfang jedes Monats des folgenden Jahres eine Rate generieren, wobei das Geld monatlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszins von 6.48% verzinst wird.

Bestimmen Sie die generierte monatliche Rate.

*Vermischte Aufgaben*

- 10.16 Herr Müller plant, 300 CHF am Ende jedes Monats auf ein Konto einzuzahlen, welches monatlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 9% verzinst wird.

Bestimmen Sie, nach wievielen Monaten das Konto 50'000 CHF wert sein wird.

- 10.17 Ein Grosselternpaar plant, am Geburtstag ihres Grosskindes ein Konto zu eröffnen und jeden Monat einen Betrag einzuzahlen, bis das Grosskind 18 Jahre alt ist. Die Anlage wird monatlich mit Zinseszins bei einem nominellen Jahreszinssatz von 12% verzinst. Der Kontostand soll am Ende der 18 Jahre 180'000 CHF betragen.

Bestimmen Sie, wieviel die Grosseltern zu Beginn jedes Monats einzahlen müssen.

- 10.18 Eine Versicherung im Wert von 750'000 CHF muss das Einkommen einer Person für die nächsten 40 Jahre ersetzen. Das Geld wird als Rente investiert, welche monatlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 8.4% verzinst wird.

Bestimmen Sie das Einkommen, welches die Rente am Ende jedes Monats generiert.

- 10.19 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Bei einer nachschüssigen Rente ...

- ☐ ... wird Geld immer einmal pro Jahr eingezahlt oder ausbezahlt.  
☐ ... wird Geld am Anfang jeder Zinsperiode eingezahlt oder ausbezahlt.  
☐ ... wächst oder fällt der Wert der Rente exponentiell.  
☐ ... werden keine Zahlungen während der Zinsperiode getätigt.

b) Bei einer nachschüssigen Rente erfolgt die Verzinsung monatlich. Wenn jeden Monat 100 CHF eingezahlt werden, kann gefolgert werden, dass der Wert der Rente nach einem Jahr ...

- ☐ ... 1200 CHF ist.  
☐ ... 1320 CHF ist, falls der nominelle Jahreszinssatz 10% beträgt.  
☐ ... weniger als 1320 CHF ist, falls der nominelle Jahreszinssatz 10% beträgt.  
☐ ... weniger als 1200 CHF ist.

c) Angenommen, ein Anfangskapital beträgt 1000 CHF. Bei einer vorschüssigen Rente (Jahreszinssatz = 1%, jährliche Verzinsung mit Zinseszins) soll 10-mal zu Beginn jedes Jahres ein konstanter Betrag ausbezahlt werden. Daraus folgt, dass die jährlichen Rückzüge ...

- ☐ ... nicht höher als 100 CHF sein dürfen.  
☐ ... genau 100 CHF sein müssen.  
☐ ... doppelt so hoch sein könnten, falls der Jahreszinssatz 2% wäre.  
☐ ... höher sein könnten bei einer nachschüssigen Rente.

## Lösungen

10.1  $R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 1300$  CHF,  $q = 1 + 6\% = 1.06$ ,  $n = 5$   
 $\Rightarrow R_5 = 7328.22$  CHF (gerundet)

10.2 siehe [Formelsammlung](#)

10.3  $n = \frac{\lg\left(\frac{R_n(q-1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_n = 80'000$  CHF,  $r = 2500$  CHF,  $q = 1 + \frac{5\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 27.08... \rightarrow 28$  Quartale = 7 Jahre

- 10.4 a) Nachschüssige Rente  
 $r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = 20'000$  CHF,  $q = 1 + 1.5\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow r = 1868.68$  CHF (gerundet)
- b) Zinseszins  
 $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$  mit  $K_n = 20'000$  CHF,  $q = 1 + 1.5\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow K_0 = 17'233.34$  CHF (gerundet)
- c) Die Zahlung in b) trägt während der ganzen 10 Jahre Zins.  
Die einzelnen Zahlungen in a) tragen nicht während der ganzen 10 Jahren Zins.

10.5 Zwilling 1: Nachschüssige Rente (Alter 23 bis 33)  
 $R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 2000$  CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow R_{10} = \text{Kapital im Alter 33} = 28'973.12$  CHF (gerundet)

Zinseszins (Alter 33 bis 65)  
 $K_n = K_0 q^n$  mit  $K_0 = R_{10}$ ,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 32$   
 $\Rightarrow K_{32} = \text{Kapital im Alter 65} = 340'059.97$  CHF (gerundet)  
( $K_{32} = \text{Kapital Zwilling 2 im Alter 65}$ )

Zwilling 2: Nachschüssige Rente (Alter 40 bis 65)  
 $r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = K_{32}$  (Zwilling 1) = 340'059.97 CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 25$   
 $\Rightarrow r = 4651.61$  CHF (gerundet)

10.6  $R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$  mit  $r = 6000$  CHF,  $q = 1 + \frac{8\%}{2}$ ,  $n = 8 \cdot 2 = 16$   
 $\Rightarrow R_0 = 69'913.77$  CHF (gerundet)

10.7 siehe [Formelsammlung](#)

10.8  $r = \frac{R_0 q^n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 135'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{6.4\%}{4}$ ,  $n = 10 \cdot 4 = 40$   
 $\Rightarrow r = 4595.46$  CHF (gerundet)

10.9  $n = \frac{\lg\left(\frac{r}{r - R_0(q-1)}\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_0 = 200'000$  CHF,  $r = 4500$  CHF,  $q = 1 + \frac{6\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 73.78... \rightarrow 73$  Quartale (weniger als 4500 CHF am Ende des 74. Quartals)

10.10 siehe [Formelsammlung](#)

10.11  $R_n = rq \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 100$  CHF,  $q = 1 + \frac{12\%}{4}$ ,  $n = 2.5 \cdot 4 = 10$   
 $\Rightarrow R_{10} = 1180.78$  CHF (gerundet)

10.12  $r = \frac{R_n(q-1)}{q(q^n-1)}$  mit  $R_n = 24'000$  CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 5$   
 $\Rightarrow r = 3787.92$  CHF (gerundet)

10.13  $n = \frac{\lg\left(\frac{rq}{rq - R_0(q-1)}\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_0 = 80'000$  CHF,  $r = 2500$  CHF,  $q = 1 + \frac{5\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 40.46... \rightarrow 40$  Quartale (weniger als 2500 CHF am Anfang des 41. Quartals)

10.14  $R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n - 1(q - 1)}$  mit  $r = 50'000$  CHF,  $q = 1 + 5.92\%$ ,  $n = 12$   
 $\Rightarrow R_0 = 445'962.23$  CHF (gerundet)

10.15  $r = \frac{R_0 q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 25'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{6.48\%}{12}$ ,  $n = 1 \cdot 12 = 12$   
 $\Rightarrow r = 2145.59$  CHF (gerundet)

10.16 Nachschüssige Rente

$n = \frac{\lg\left(\frac{R_n(q-1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_n = 50'000$  CHF,  $r = 300$  CHF,  $q = 1 + \frac{9\%}{12}$   
 $\Rightarrow n = 108.52... \rightarrow 109$  Monate (= 9 Jahre 1 Monat)

10.17 Vorschüssige Rente

$r = \frac{R_n(q-1)}{q(q^n-1)}$  mit  $R_n = 180'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{12\%}{12}$ ,  $n = 18 \cdot 12 = 216$   
 $\Rightarrow r = 235.16$  CHF (gerundet)

10.18 Nachschüssige Rente, Einkommen = monatliche Zahlung  $r$

$r = \frac{R_0 q^n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 750'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{8.4\%}{12}$ ,  $n = 40 \cdot 12 = 480$   
 $\Rightarrow r = 5441.23$  CHF (gerundet)

- 10.19 a) 4. Aussage  
b) 3. Aussage  
c) 4. Aussage