Aufgaben 15 Bestimmtes Integral

Bestimmtes Integral, Fläche unter einer Kurve, Konsumenten-/ Produzentenrente

Lernziele

- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden können.
- ein bestimmtes Integral einer konstanten Funktion, einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- den Flächeninhalt zwischen dem Grafen einer elementaren Potenzfunktion und der Abszissenachse bestimmen können.
- eine Konsumenten- und Produzentenrente bestimmen können, wenn die Nachfrage- und Angebotsfunktion elementare Potenzfunktionen sind.

Aufgaben

15.1 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_3^4 (2x - 5)\, dx$ b) $\int_0^1 (x^3 + 2x)\, dx$ c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx$

d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx$ e) $\int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{8}x^4 + 2x^2\right) dx$ f) $\int_{-1}^{1} e^x\, dx$

g) $\int_0^1 e^{2x}\, dx$ h) $\int_{-1}^{1} e^{-3x}\, dx$

15.2 Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Grafen der Funktion f und der x-Achse im Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x-Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$.

a) $f(x) = -x^2 + 1$ b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Hinweise:
- Bestimmen Sie zuerst die Stellen x, wo der Graf von f die x-Achse berührt oder schneidet, d.h. wo $f(x) = 0$
- Bestimmen Sie dann das Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x-Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$

15.3 Die Nachfragefunktion für ein Produkt ist $p = f_N(x) = (100 - 4x^2)$ CHF.
Wie gross ist die Konsumentenrente, falls die Gleichgewichtsmenge 4 Einheiten sind?

15.4 Die Nachfragefunktion für ein Produkt ist $p = f_N(x) = (34 - x^2)$ CHF.
Wie gross ist die Konsumentenrente, falls der Gleichgewichtspreis 9 CHF beträgt?

15.5 Angenommen, die Angebotsfunktion für eine Ware oder Dienstleistung ist $p = f_A(x) = (4x^2 + 2x + 2)$ CHF.
Wie gross ist die Produzentenrente, falls der Gleichgewichtspreis 422 CHF beträgt?

15.6 Die Angebotsfunktion f_A und die Nachfragefunktion f_N für ein bestimmtes Produkt oder eine bestimmte Dienstleistung lauten wie folgt:

$$p = f_A(x) = (x^2 + 4x + 11) \text{ CHF}$$

$$p = f_N(x) = (81 - x^2) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie …

a) … das Marktgleichgewicht, d.h. die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis.

b) (siehe nächste Seite)

b) … die Konsumentenrente bei Marktgleichgewicht.

c) … die Produzentenrente bei Marktgleichgewicht.

15.7 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Das bestimmte Integral einer Funktion ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl.
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Menge von Funktionen.
- ☐ ... ein Graf.

b) $\int_a^b f(x)\,dx$ ...

- ☐ ... = f(b) - f(a)
- ☐ ... = F(a) - F(b) wobei F eine Stammfunktion von f ist.
- ☐ ... ist gleich dem Flächeninhalt zwischen dem Grafen von f und der x-Achse auf dem Intervall $a \le x \le b$ falls $f(x) \ge 0$ auf dem Intervall $a \le x \le b$.
- ☐ ... kann nicht berechnet werden, wenn nicht alle Stammfunktionen von f bekannt sind.

c) Die Konsumentenrente ist ein Flächeninhalt zwischen ...

- ☐ ... den Grafen von Nachfrage- und Angebotsfunktion.
- ☐ ... der x-Achse und dem Grafen der Nachfragefunktion.
- ☐ ... dem Grafen der Nachfragefunktion und der horizontalen Linie “Preis = Gleichgewichtspreis”.
- ☐ ... der horizontalen Linie “Preis = Gleichgewichtspreis” und dem Grafen der Angebotsfunktion.

Lösungen

15.1 a) $\int_3^4 (2x - 5)\,dx = \left[2\cdot\frac{1}{2}x^2 - 5x\right]_3^4 = [x^2 - 5x]_3^4 = \left(4^2 - 5\cdot4\right) - \left(3^2 - 5\cdot3\right) = 2$

b) $\int_0^1 (x^3 + 2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4}1^4 + 1^2\right) - \left(\frac{1}{4}0^4 + 0^2\right) = \frac{5}{4}$

c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right)dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-5}^{-3} = \left[\frac{1}{6}x^3 - 4x\right]_{-5}^{-3} = \left(\frac{1}{6}(-3)^3 - 4\cdot(-3)\right) - \left(\frac{1}{6}(-5)^3 - 4\cdot(-5)\right) = \frac{25}{3}$

d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + 3\cdot\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_2^4 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_2^4$
$= \left(\frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{6}4^3 + \frac{3}{2}4^2 - 4\cdot4\right) - \left(\frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{6}2^3 + \frac{3}{2}2^2 - 4\cdot2\right) = \frac{182}{3}$

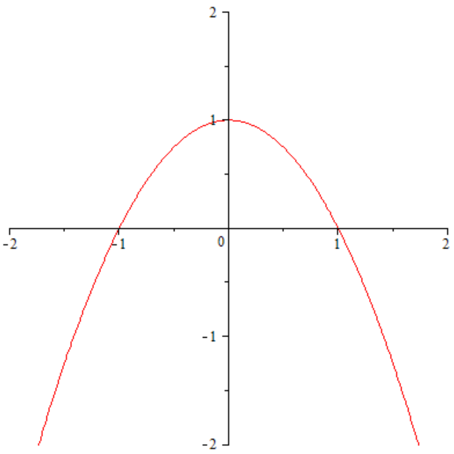
e) $\int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{8}x^4 + 2x^2\right)dx = \left[-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}x^5 + 2\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 = \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^2$
$= \left(-\frac{1}{40}2^5 + \frac{2}{3}2^3\right) - \left(-\frac{1}{40}(-2)^5 + \frac{2}{3}(-2)^3\right) = \frac{136}{15}$

f) $\int_{-1}^1 e^x\,dx = [e^x]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$

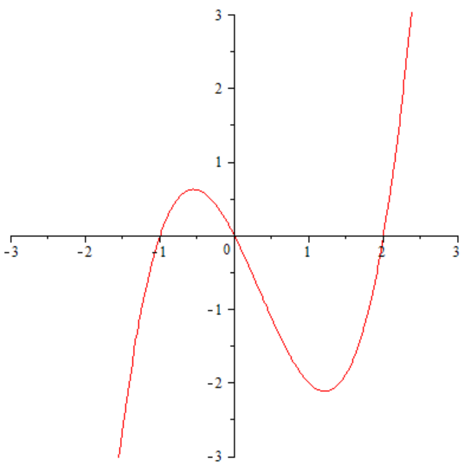
g) $\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}[e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2}(e^{2\cdot1} - e^{2\cdot0}) = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

h) $\int_{-1}^1 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3}[e^{-3x}]_{-1}^1 = -\frac{1}{3}\left(e^{-3\cdot1} - e^{-3\cdot(-1)}\right) = -\frac{1}{3}(e^{-3} - e^3) = \frac{1}{3}\left(e^3 - \frac{1}{e^3}\right)$

15.2 a) $A = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$



b) $A = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^0 = \frac{5}{12}$



15.3 Konsumentenrente
CS = 170.67 CHF (gerundet)

15.4 Konsumentenrente
CS = 83.33 CHF (gerundet)

15.5 Produzentenrente
PS = 2766.67 CHF (gerundet)

15.6 a) Gleichgewichtsmenge
$x = 5$

Gleichgewichtspreis
$p = 56$ CHF

b) Konsumentenrente
CS = 83.33 CHF (gerundet)

c) Produzentenrente
PS = 133.33 CHF (gerundet)

15.7 a) 1. Aussage

b) 3. Aussage

c) 3. Aussage