

Aufgaben 12 Ableitungsregeln Faktor-/Summen-/Produktregel, Höhere Ableitungen

Lernziele

- die Faktor-, Summen- und Produktregel anwenden können, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen.
- eine höhere Ableitung einer Funktion bestimmen können.

Aufgaben

12.1 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Faktorregel**:

- | | | |
|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = 3x^5$ | b) $f(x) = -4x^3$ | c) $f(x) = -x^{10}$ |
| d) $f(x) = a \cdot x^3$ | e) $f(x) = n \cdot x^{n-1}$ | f) $f(x) = 9 \cdot 3^x$ |
| g) $s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ | h) $S(T) = \alpha \cdot T^4$ | i) $C(x) = (-3x)^3$ |

12.2 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Summenregel**:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $f(x) = x^5 + x^6$ | b) $f(x) = x^{10} - x^9$ | c) $f(x) = 1 + x + 3x^3$ |
| d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2$ | e) $f(x) = 3x^2(x - 2)$ | f) $f(x) = -3x^8 + x^5 - 3x + 99$ |
| g) $f(x) = ax^2 + bx + c$ | h) $f(x) = 3(a^2 - 2ax + x^2)$ | i) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$ |
| j) $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}g \cdot t^2$ | k) $V(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ | l) $K(n) = K_0(1 + ni)$ |

Hinweis :

- In einigen Teilaufgaben benötigt man zusätzlich die Faktorregel.

12.3 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Produktregel**:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) $f(x) = x \cdot e^x$ | b) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$ |
| c) $f(x) = -2x^5(x - 1)$ | d) $f(x) = (2x - 1) \cdot e^x$ |
| e) $f(x) = (2x - 1)(-3x^2 - x + 1)$ | f) $V(r) = e^r \left(a \cdot r^2 - \frac{b}{r^3} \right)$ |

Hinweis:

- In einigen Teilaufgaben benötigt man zusätzlich die Faktor- und/oder die Summenregel.

12.4 Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Exponentialfunktionen:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = e^{4x}$ | b) $f(x) = e^{-x}$ |
| c) $f(x) = e^{-x^2}$ | d) $f(x) = e^{x^2-2x+5}$ |

12.5 Bestimmen Sie die Ableitung. Verwenden Sie dabei die geeignete(n) Ableitungsregel(n). Vereinfachen und faktorisieren Sie die Ableitung so weit wie möglich:

- | | |
|---|------------------------------|
| a) $f(x) = (x - 2) e^{2x}$ | b) $f(x) = (2 - x^2) e^{-x}$ |
| c) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x - 1) e^{-2x}$ | d) $P(v) = av^2 e^{-bv^2}$ |

12.6 (siehe nächste Seite)

12.6 Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen (Änderungsraten):

- a) $f'(2)$ für die Funktion f in 12.1 b)
- b) $s'(4)$ für die Funktion s in 12.1 g)
- c) $f'(-1)$ für die Funktion f in 12.2 g)
- d) $P'(1)$ für die Funktion P in 12.5 d)

12.7 Bestimmen Sie die zweite und die dritte Ableitung der angegebenen Funktionen. Vereinfachen und faktorisieren Sie die höheren Ableitungen so weit wie möglich:

- a) Funktion f in 12.1 a)
- b) Funktion f in 12.2 g)
- c) Funktion f in 12.3 a)
- d) Funktion f in 12.4 c)

Hinweis:

- Sie haben bereits die erste Ableitung der entsprechenden Funktionen bestimmt.

12.8 Bestimmen Sie die angegebenen höheren Ableitungen:

- a) $f''(-1)$ für die Funktion f in 12.1 a)

Hinweis:

- Sie haben in 12.7 a) bereits $f'(x)$ bestimmt.

- b) $f'''(2)$ für die Funktion f in 12.4 c)

Hinweis:

- Sie haben in 12.7 d) bereits $f''(x)$ bestimmt.

12.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Die dritte Ableitung einer Funktion ist eine ...

- ... konstante Funktion, falls die zweite Ableitung eine quadratische Funktion ist.
- ... quadratische Funktion, falls die zweite Ableitung eine lineare Funktion ist.
- ... lineare Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.
- ... konstante Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.

- b) Die Ableitung ...

- ... eines Produkts ist das Produkt der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
- ... eines Produkts ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
- ... einer Summe ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden.
- ... einer Konstanten ist die Konstante selbst.

- c) Für $f(x) = c \cdot g(x) \cdot h(x)$ gilt $f'(x) = \dots$

- ... 0
- ... $c \cdot g'(x) \cdot h'(x)$
- ... $c \cdot g(x) \cdot h'(x) + c \cdot g'(x) \cdot h(x)$
- ... $c \cdot g'(x) \cdot h'(x) + c \cdot g(x) \cdot h(x)$

Lösungen

- 12.1 a) $f'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
 b) $f'(x) = (-4) 3x^2 = -12x^2$
 c) $f'(x) = (-1) 10x^9 = -10x^9$
 d) $f'(x) = a \cdot 3x^2 = 3ax^2$

Hinweis:
- a ist eine Konstante.

- e) $f'(x) = n(n-1)x^{n-2}$
 f) $f'(x) = 9 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$
 g) $s'(t) = \frac{g}{2} 2t = gt$

Hinweise:
- Der Name der Funktion ist s, und die Variable ist t.
- g ist eine Konstante.

- h) $S'(T) = \alpha \cdot 4T^3 = 4\alpha T^3$
 i) $C'(x) = -81x^2$

- 12.2 a) $f'(x) = 5x^4 + 6x^5$ b) $f'(x) = 10x^9 - 9x^8$ c) $f'(x) = 1 + 9x^2$
 d) $f'(x) = x^3 + 6x$ e) $f'(x) = 9x^2 - 12x$ f) $f'(x) = -24x^7 + 5x^4 - 3$
 g) $f'(x) = 2ax + b$ h) $f'(x) = -6a + 6x$ i) $f'(x) = x^2 + \frac{9}{x^4}$
 j) $s'(t) = v_0 + gt$ k) $V'(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3}$ l) $K'(n) = K_0 \cdot i$

- 12.3 a) $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$
 b) $f'(x) = 3x^2 \cdot 3^x + x^3 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$
 c) $f'(x) = -2(5x^4(x-1) + x^5)$
 d) $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x$
 e) $f'(x) = 2(-3x^2 - x + 1) + (2x-1)(-6x-1)$
 f) $V'(r) = e^r \left(a \cdot r^2 - \frac{b}{r^3} \right) + e^r \left(2a \cdot r + \frac{3b}{r^4} \right)$

Hinweise:
- V ist der Name der Funktion, und r ist die Variable.
- a und b sind Konstanten.

- 12.4 a) $f'(x) = 4 e^{4x}$ b) $f'(x) = (-1) e^{-x} = -e^{-x}$
 c) $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ d) $f'(x) = (2x-2) e^{x^2-2x+5}$

- 12.5 a) $f'(x) = e^{2x} + (x-2) 2 e^{2x} = (2x-3) e^{2x}$
 b) $f'(x) = -2x e^{-x} + (2-x^2)(-1) e^{-x} = (x^2-2x-2) e^{-x}$
 c) $f'(x) = (9x^2-4x+1) e^{-2x} + (3x^3-2x^2+x-1)(-2) e^{-2x} = (-6x^3+13x^2-6x+3) e^{-2x}$
 d) $P'(v) = a \left(2v e^{-bv^2} + v^2(-2bv) e^{-bv^2} \right) = 2av(1-bv^2) e^{-bv^2}$

12.6 (siehe nächste Seite)

- 12.6 a) 12.1 b) $f'(2) = -48$ b) 12.1 g) $s'(4) = 4g$
c) 12.2 g) $f'(-1) = -2a + b$ d) 12.5 d) $P'(1) = 2a(1 - b)e^{-b}$
- 12.7 a) 12.1 a)
 $f''(x) = 15 \cdot 4x^3 = 60x^3$
 $f'''(x) = 60 \cdot 3x^2 = 180x^2$
b) 12.2 g)
 $f''(x) = 2a \cdot 1 = 2a$
 $f'''(x) = 0$
c) 12.3 a)
 $f''(x) = e^x + (e^x + x \cdot e^x) = (x + 2)e^x$
 $f'''(x) = e^x + (x + 2)e^x = (x + 3)e^x$
d) 12.4 c)
 $f''(x) = -2(e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2}) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$
 $f'''(x) = 2(4xe^{-x^2} + (2x^2 - 1)(-2x)e^{-x^2}) = 4x(-2x^2 + 3)e^{-x^2}$
- 12.8 a) $f''(-1) = 60(-1)^3 = -60$
b) $f'''(2) = 4 \cdot 2(-2 \cdot 2^2 + 3)e^{-2^2} = -\frac{40}{e^4}$
- 12.9 a) 4. Aussage
b) 3. Aussage
c) 3. Aussage