Aufgaben 8 Exponentialfunktion und -gleichungen Zinseszins, Exponentialfunktion

Lernziele

- Zinseszinsberechnungen ausführen können.
- eine Exponentialfunktion bei vorgegebener Funktionsgleichung grafisch darstellen können.
- die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion aus zwei Punkten, die auf dem Grafen der Funktion liegen, bestimmen können.
- angewandte Problemstellungen mit Hilfe der Exponentialfunktion bearbeiten können.

Aufgaben

Zinseszins

8.1 Ein Anfangskapital K_0 ist zum Zinssatz i mit Zinseszins angelegt.

a) Das Anfangskapital sei $K_0 = 1000.00$ CHF und der Zinssatz $i = 2\%$.
Bestimmen Sie das Kapital nach einem, zwei, drei, vier und fünf Zinsperioden.

b) Versuchen Sie, eine Formel herzuleiten, die es Ihnen erlaubt, das Kapital K_n nach n Zinsperioden zu berechnen für beliebige Werte von K_0, i und n.

c) Lösen Sie die Formel, die Sie in b) hergeleitet haben, nach K_0 und i.

8.2 Welches ist das zukünftige Kapital, wenn 8000 CHF 10 Jahre lang bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 12% investiert werden?

8.3 Welches Anfangskapital beträgt nach 10 Jahren 10'000 CHF, wenn es bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem Jahreszinssatz von 6% angelegt wird?

8.4 Zu welchem Jahreszinssatz müssten 10'000 CHF bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins angelegt werden, damit das Kapital nach 7 Jahren 14'000 CHF betragen würde?

8.5 Frau Schmid möchte 150'000 CHF 5 Jahre lang anlegen. Die Bank A offeriert ihr bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins einen Jahreszinssatz von 6.5%. Die Bank B bietet an, nach 5 Jahren 200'000 CHF auszuzahlen. Welche Bank macht das bessere Angebot?

8.6 Maria Stähli investierte 2500 CHF in eine 36-Monate-Anlage bei jährlicher **einfacher Verzinsung** zu einem Jahreszinssatz von 8.5%. Als die Anlage auslief, investierte sie die ganze Summe in einen Fond, der bei jährlicher Verzinsung mit **Zinseszins** einem jährlichen Wachstum von 18% entsprach. Wieviel war dieser Fond nach 9 Jahren wert?

8.7 Ein Kapital wird 4 Jahre lang zu 4% und 3 weitere Jahre lang zu 6% angelegt, jeweils bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins. Am Ende beträgt das Kapital 72'000 CHF.

a) Bestimmen Sie das Anfangskapital.

b) Wie hoch ist der durchschnittliche Zinssatz bezüglich der ganzen Zeitperiode?

8.8 (siehe nächste Seite)

8.8 Ein unbekanntes Anfangskapital wird bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem unbekannten Jahreszinssatz angelegt.
Nach zwei Jahren beträgt das Kapital 5'891.74 CHF (gerundet) und nach 5 weiteren Jahren 6'997.54 CHF (gerundet).
Bestimmen Sie sowohl das Anfangskapital (auf 100 CHF gerundet) als auch den Jahreszinssatz (auf 0.1% gerundet).

8.9 Ein Kapital wird bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszins angelegt. Bei welchem Jahreszinssatz verdoppelt sich das Kapital in 20 Jahren?

8.10 Was ist der zukünftige Wert, wenn 3200 CHF 5 Jahre lang bei vierteljährlicher Verzinsung mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 8% angelegt werden?

8.11 Welchen Geldbetrag müssen Eltern auf ein Konto einzahlen, welches monatlich mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 10% verzinst wird, damit das Geld für die Ausbildung ihres Sohnes in 18 Jahren auf 40'000 CHF anwächst?

8.12 Ein bestimmtes Kapital wird mit Zinseszins zu einem nominellen Jahreszinssatz von 6% angelegt. Um wieviel Prozent wächst das Kapital in einem Jahr bei …

a) ... jährlicher Verzinsung?

b) ... halbjährlicher Verzinsung?

c) ... vierteljährlicher Verzinsung?

d) ... monatlicher Verzinsung?

e) ... täglicher Verzinsung (1 Jahr = 360 Tage)?

Exponentialfunktion

8.13 Betrachten Sie die folgende Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = 2^x \end{aligned}$$

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle von f für das Intervall $-3 \le x \le 3$.

b) Zeichnen Sie den Grafen von f im Intervall $-3 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

8.14 Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Exponentialfunktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} f_1:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_1(x) = 2^x \end{aligned}$$

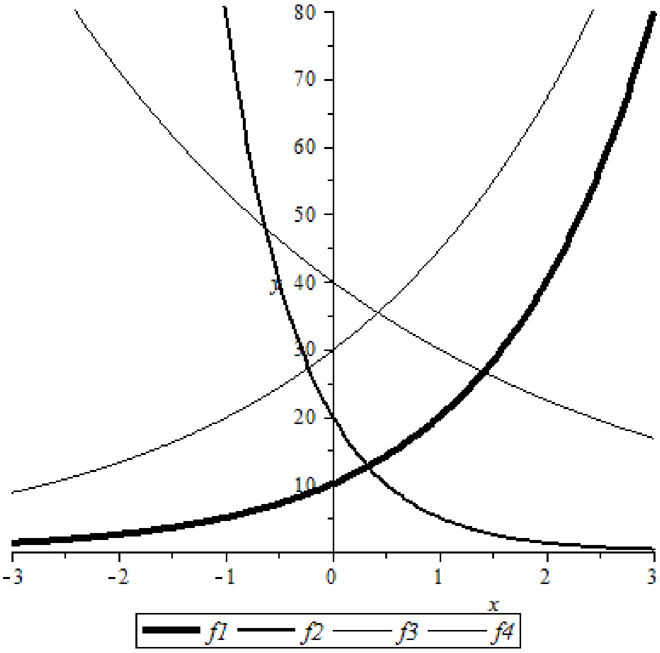
$$\begin{aligned} f_2:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_2(x) = 0.2^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_3(x) = 3 \cdot 0.5^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_4(x) = -2 \cdot 3^x \end{aligned}$$

8.15 (siehe nächste Seite)

8.15 Betrachten Sie die Grafen der Exponentialfunktionen f_1, f_2, f_3 und f_4:



Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der vier Funktionen, d.h. y = f(x) = ...

8.16 Der Graf einer Exponentialfunktion enthält die Punkte P und Q.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion.

a) P(1|12) Q(3|192)

b) P(0|1.02) Q(1|1.0302)

c) P(5|16) $Q\left(9|\frac{1}{16}\right)$

8.17 Der Wert einer Wohnung, welche vor 20 Jahren 160'000 CHF gekostet hat, ist aufgrund der Marktsituation jedes Jahr um 4% gestiegen. Wieviel kostet die Wohnung heute?

8.18 Der Wert einer Maschine wird auf 10'000 CHF geschätzt. Die Entwertung beträgt jährlich 20%. Bestimmen Sie den Wert der Maschine nach 4 Jahren.

8.19 Die Grösse einer bestimmten Bakterienkultur wächst exponentiell. Um 8 Uhr betrug die Anzahl Bakterien 2'300, um 11 Uhr 18'400. Bestimmen Sie die Anzahl Bakterien um 13:30 Uhr.

8.20 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Bei einer Anlage mit Zinseszins ...

- ☐ ... ist der Graf, der das Wachstum des Kapitals darstellt, eine Parabel.
- ☐ ... hängt der Zins, welcher am Ende jeder Zinsperiode bezahlt wird, nur vom Zinssatz ab.
- ☐ ... hängt der Zinssatz vom Kapital in der vorangehenden Periode ab.
- ☐ ... wächst das Kapital exponentiell.

b) (siehe nächste Seite)

b) Der Graf einer Exponentialfunktion ...

- ☐ ... ist eine Parabel.
- ☐ ... ist eine Hyperbel.
- ☐ ... schneidet die y-Achse nie.
- ☐ ... berührt die x-Achse nie.

c) Wenn eine Grösse im zeitlichen Verlauf exponentiell wächst, dann ...

- ☐ ... wächst der Wachstumsfaktor selbst.
- ☐ ... hängt der Wachstumsfaktor vom Anfangswert ab.
- ☐ ... verdoppelt sich die Grösse in einem Jahr, falls der jährliche Wachstumsfaktor 100% ist.
- ☐ ... verdoppelt sich die Grösse in konstanten Zeitintervallen.

Lösungen

8.1 a) $K_0 = 1000.00$ CHF $K_1 = 1020.00$ CHF $K_2 = 1040.40$ CHF
$K_3 = 1061.21$ CHF (gerundet) $K_4 = 1082.43$ CHF (gerundet) $K_5 = 1104.08$ CHF (gerundet)

b) $K_n = K_0\,(1 + i)^n$

c) siehe [Formelsammlung]

8.2 $K_n = K_0\,(1 + i)^n$ mit $K_0 = 8000$ CHF, $i = 12\%$, $n = 10$

$\Rightarrow$ $K_{10} = 24'846.79$ CHF (gerundet)

8.3 $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$ mit $K_n = 10'000$ CHF, $i = 6\%$, $n = 10$

$\Rightarrow$ $K_0 = 5'583.95$ CHF (gerundet)

8.4 $i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$ mit $K_0 = 10'000$ CHF, $K_n = 14'000$ CHF, $n = 7$

$\Rightarrow$ $i = 4.9\%$ (gerundet)

8.5 Bank A: $K_5 = 205'513.00$ CHF (gerundet)
Bank B: $K_5 = 200'000.00$ CHF

8.6 13'916.24 CHF

2 Perioden: 3 Jahre einfacher Zins, 9 Jahre Zinseszins

- 3 Jahre einfacher Zins:
  $K_n = K_0(1 + ni)$ mit $K_0 = 2500$ CHF, $i = 8.5\%$, $n = 3$
  $\Rightarrow$ $K_3 = 3137.50$ CHF

- 9 Jahre Zinseszins:
  $K_n = K_0\,(1 + i)^n$ mit $K_0 = \ldots$ (= K_3 nach den ersten drei Jahren), $i = 18\%$, $n = 9$
  $\Rightarrow$ $K_9 = 13'916.24$ CHF (gerundet)

8.7 a) $K_0 = 51'675$ CHF (gerundet)

Hinweise:
- Betrachten Sie zuerst die zweite Periode (3 Jahre, beginnend nach den ersten 4 Jahren), und berechnen Sie das Kapital zu Beginn dieser zweiten Periode.
- Berechnen Sie dann das Anfangskapital.

b) $i = 4.85\%$ (gerundet)

Hinweise:
- Es gibt zwei mögliche Lösungswege:
- **Lösungsweg 1**
  Der durchschnittliche Zinssatz i muss so sein, dass gilt:
  $K_n = K_0\,(1 + i)^n = K_0\,(1 + i_1)^{n_1}\,(1 + i_2)^{n_2}$ und $n_1 + n_2 = n$
  mit i_1 = Zinssatz in den ersten n_1 Zinsperioden, i_2 = Zinssatz in den verbleibenden n_2 Zinsperioden
- **Lösungsweg 2**
  Der durchschnittliche Zinssatz i muss so sein, dass gilt:
  $K_n = K_0\,(1 + i)^n$
  mit K_0 = Anfangskapital, K_n = Kapital nach den gesamten n Zinsperioden

8.8 $i = 3.5\%$, $K_0 = 5'500.00$ CHF

Hinweise:
- Betrachten Sie zuerst die zweite Periode der Länge 5 Jahre mit $K_0 = 5'891.74$ CHF und $K_5 = 6'997.54$ CHF.
- Die 5'891.74 CHF können als Kapital K_2 am Ende der ersten 2 Jahre betrachtet werden, falls K_0 das Anfangskapital zu Beginn der ganzen 7 Jahre ist.

8.9 $i = \sqrt[20]{2} - 1 = 3.5\%$ (gerundet)

8.10 $K_n = K_0\,(1 + i)^n$ mit $K_0 = 3200$ CHF, $i = \frac{8\%}{4} = 2\%$, $n = 5 \cdot 4 = 20$

$\Rightarrow$ $K_{20} = 4755.03$ CHF (gerundet)

8.11 $K_0 = \frac{K_n}{(1 + i)^n}$ mit $K_n = 40'000$ CHF, $i = \frac{10\%}{12}$, $n = 18 \cdot 12 = 216$

$\Rightarrow$ $K_0 = 6661.46$ CHF (gerundet)

8.12 Kapital nach 1 Jahr
$K_n = K_0\,(1 + i)^n$ (n = Anzahl Zinsperioden pro Jahr, i = Zinssatz pro Zinsperiode)
$K_n = K_0\,(1 + x)$ (x = gesuchter Prozentsatz)

$\Rightarrow$ $x = (1 + i)^n - 1$

a) $n = 1$, $i = 6\%$ $x = 6\%$

b) $n = 2$, $i = \frac{6\%}{2}$ $x = 6.09\%$

c) $n = 4$, $i = \frac{6\%}{4}$ $x = 6.136\%$ (gerundet)

d) $n = 12$, $i = \frac{6\%}{12}$ $x = 6.168\%$ (gerundet)

e) $n = 360$, $i = \frac{6\%}{360}$ $x = 6.183\%$ (gerundet)

8.13 ...

8.14 ...

8.15 $y = f_1(x) = 10 \cdot 2^x$ $(c = 10, a = 2)$

$y = f_2(x) = 20 \cdot 0.25^x$ $(c = 20, a = 0.25)$

$y = f_3(x) = 30 \cdot 1.5^x$ $(c = 30, a = 1.5)$

$y = f_4(x) = 40 \cdot 0.75^x$ $(c = 40, a = 0.75)$

8.16 a) $y = f(x) = 3 \cdot 4^x$

Hinweise:
- Die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion lautet $y = f(x) = c \cdot a^x$
- Wenn $P(1|12)$ und $Q(3|192)$ Punkte des Grafen der Exponentialfunktion sind, dann müssen ihre Koordinaten die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion erfüllen, d.h. $12 = f(1) = c \cdot a^1$ und $192 = f(3) = c \cdot a^1$
- Lösen Sie die beiden Gleichungen nach c und a.

b) (siehe nächste Seite)

b) $y = f(x) = 1.02 \cdot 1.01^x$

c) $y = f(x) = 16'384 \cdot 0.25^x$

8.17 350'580 CHF (gerundet)

Hinweis:
- Die Beziehung zwischen der Zeit t (t = Anzahl vergangener Jahre seit vor 20 Jahren) und Wert W der Wohnung ist eine Exponentialfunktion:
  $W = f(t) = W_0 \cdot a^t$
  mit W = Wert zur Zeit t, W_0 = Anfangswert (bei t = 0) = 160'000 CHF, a = Wachstumsfaktor = 1 + 4% = 1.04

8.18 4'096 CHF

8.19 104'086 (gerundet)

8.20 a) 4. Aussage

b) 4. Aussage

c) 4. Aussage