Aufgaben 3 Lineare Funktion und Gleichungen
Lineare Funktion, Einfacher Zins, Kosten, Ertrag, Gewinn, -schwelle

Lernziele

- eine Beziehung zwischen zwei Grössen als Funktion verstehen können.
- die Definitionsmenge, Zielmenge und Bildmenge einer gegebenen Funktion bestimmen können.
- den Grafen einer gegebenen linearen Funktion zeichnen können.
- die Steigung und den Achsenabschnitt einer linearen Funktion bestimmen können.
- einige Beispiele von linearen Funktionen aus Wirtschafts- und Alltagsanwendungen kennen.
- wissen und verstehen, was einfacher Zins ist.
- Berechnungen für die einfache Verzinsung ausführen können.
- wissen und verstehen, was Fixkosten, variable Kosten, Gesamtkosten, Ertrag, Gewinn und Gewinnschwelle sind.
- das Konzept der linearen Funktion in einem neuen Problem anwenden können.

Aufgaben

3.1 Ein Taxifahrer verlangt den folgenden Tarif:

8 CHF plus 1.50 CHF pro Kilometer

Fassen Sie den Tarif als eine Funktion f auf.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D, den Zielbereich Z und den Wertebereich B der Funktion.

b) Zeichnen Sie den Grafen der Funktion f.

3.2 Der in der Aufgabe 3.1 beschriebene Taxitarif kann als lineare Funktion aufgefasst werden, welche jedem Fahrweg einen Fahrpreis zuordnet:

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto y = f(x) = ax + b \end{aligned}$$

mit: x = Fahrweg/km
y = Fahrpreis/CHF

Bestimmen Sie die Werte von a und b.

3.3 Finden Sie mindestens zwei weitere Beispiele linearer Funktionen aus der Wirtschaft und dem Alltag.

3.4 Zeichnen Sie die Grafen der folgenden linearen Funktionen, und bestimmen Sie sowohl die Steigung als auch den Achsenabschnitt:

a) $$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = -2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = 2x - 6 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = -x + 3 \end{aligned}$$

3.5 Ein Anfangskapital von 5000 CHF wird zum Jahreszinssatz 0.5% einfach verzinst.

a) Bestimmen Sie den Zins, der jedes Jahr ausbezahlt wird.

b) (siehe nächste Seite)

b) Bestimmen Sie das Kapital nach zehn Jahren.

c) Bestimmen Sie sowohl die Steigung als auch den Achsenabschnitt der entsprechenden linearen Funktion.

3.6 Wenn allgemein ein Anfangskapital K_0 zum Jahreszinssatz i (z.B. i = 1.5% = 0.015) einfach verzinst wird, dann gilt für das Kapital K_n nach n Jahren die folgende Formel (siehe Formelsammlung):

$$K_n = K_0(1 + ni)$$

a) Prüfen Sie nach, dass die gegebene Formel korrekt ist.

b) Bestimmen Sie sowohl Steigung als auch Achsenabschnitt der entsprechenden linearen Funktion.

3.7 Ein Anfangskapital K_0 = 1200 CHF wird zum Jahreszinssatz 1.5% einfach verzinst.

a) Nach wievielen Jahren übersteigt das Kapital 2000 CHF?

b) Bei welchem Jahreszinssatz (auf 0.05% gerundet) würde das Kapital nach 20 Jahren 2000 CHF übersteigen?

Hinweis:
- Verwenden Sie die Formel in der Aufgabe 3.6, und lösen Sie nach n bzw. i auf.

3.8 Ein Satelliten-Telefonie-Unternehmen bietet drei verschiedene Tarife an:

Tarif A:	monatliche Grundgebühr von 10 CHF plus 0.20 CHF pro Minute
Tarif B:	monatliche Grundgebühr von 25 CHF plus 0.10 CHF pro Minute
Tarif C:	keine Grundgebühr, 0.60 CHF pro Minute

Fassen Sie die drei Tarife als lineare Funktionen auf.

a) Zeichnen Sie die Grafen der drei Funktionen in ein einziges Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Gesamtgebühr für alle drei Tarife bei einer monatlichen Gesprächsdauer von 1 Stunde.

c) Für welche monatliche Gesprächsdauer ist der Tarif A günstiger als der Tarif C?

d) Für welche monatliche Gesprächsdauer ist der Tarif B günstiger als der Tarif A?

3.9 Wirtschaft: Kosten

Raggs AG, eine Bekleidungsfirma, hat **Fixkosten** von 10'000 CHF pro Jahr. Diese Kosten für Miete, Unterhalt, usw. müssen bezahlt werden unabhängig davon, wieviel die Firma produziert. x Stück eines bestimmten Kleides herzustellen kostet, zusätzlich zu den Fixkosten, 20 CHF pro Kleid. Dies bedeutet, dass die **variablen Kosten** für die Herstellung von x Kleidern 20x CHF beträgt. Diese Kosten hängen also von der Produktionsmenge ab und hängen von Material, Gehältern, Öl, usw. ab. Die **Gesamtkosten** K(x) für die Produktion von x Kleidern ist gegeben durch eine Funktion K:

$$K(x) = (\text{Variable Kosten}) + (\text{Fixkosten}) = (20x + 10'000)\ \text{CHF}$$

a) Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen für die variablen Kosten, die Fixkosten und die Gesamtkosten.

b) Wie hoch sind die Gesamtkosten bei 100 Kleidern? 400 Kleidern?

3.10 (siehe nächste Seite)

3.10 Wirtschaft: Gewinn-Verlust-Analyse

Wenn ein Unternehmen ein Stück eines Artikels verkauft, dann erhält es den Preis, den der Käufer bezahlt. Dieser ist normalerweise höher als die Kosten für die Produktion.

a) Der **Ertrag**, den ein Unternehmen erzielt, ist das Produkt der verkauften Stückzahl und dem dafür bezahlten Preis. Wenn also Raggs AG (siehe Aufgabe 4.9) x Kleider zu 80 CHF verkauft, dann ist der Ertrag E(x) gegeben durch

$$E(x) = \text{Stückpreis} \cdot \text{verkaufte Stückzahl} = 80x \text{ CHF}$$

Es sei $K(x) = (20x + 10'000)$ CHF (siehe Aufgabe 3.9).

Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen E und K ins gleiche Koordinatensystem.

b) Der **Gewinn**, den ein Unternehmen erzielt, ist der Betrag, der übrig bleibt, wenn vom Ertrag die Gesamtkosten subtrahiert worden sind. Wenn also G(x) der Gewinn bei x verkauften Stück ist, erhalten wir

$$G(x) = \text{Ertrag - Gesamtkosen} = E(x) - K(x)$$

Bestimmen Sie G(x), und zeichnen Sie den Grafen der Funktion G in das gleiche Koordinatensystem, welches Sie schon bei a) benützt haben.

c) Das Unternehmen erreicht die **Gewinnschwelle** bei derjenigen Stückzahl x, bei welcher $G(x) = 0$ CHF (d.h. kein Gewinn und kein Verlust) gilt. Dies ist der Fall für $E(x) = K(x)$.

Finden Sie den Wert x für die Gewinnschwelle.

3.11 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a)
- ☐ Jede in einem Koordinatensystem eingezeichnete gerade Linie kann als Graf einer linearen Funktion aufgefasst werden.
- ☐ Der Graf jeder linearen Funktion ist eine Gerade.
- ☐ Wenn y proportional zu x ist, dann ist x nicht zwingend proportional zu y.
- ☐ Der Wertebereich jeder linearen Funktion ist $\mathbb{R}$.

b) f kann keine lineare Funktion sein, falls ...
- ☐ ... der Graf von f eine Gerade ist.
- ☐ ... $f(x) \neq x$ für mindestens ein Element x des Definitionsbereichs von f.
- ☐ ... der Definitionsbereich von f nicht aus allen reellen Zahlen besteht.
- ☐ ... $f(x) = ax + b$ und dabei a von x abhängt.

c) Bei einfacher Verzinsung ...
- ☐ ... entspricht die Beziehung zwischen der Zeit und dem Kapital keiner linearen Funktion.
- ☐ ... hängt der Zins, welcher am Ende jeder Zinsperiode ausbezahlt wird, vom Kapital am Ende der vorangehenden Zinsperiode ab.
- ☐ ... ist der Zins, welcher am Ende jeder Zinsperiode ausbezahlt wird, immer der gleiche Geldbetrag.
- ☐ ... verdoppelt sich das Kapital in weniger als 5 Jahren, falls der Jahreszinssatz 20% beträgt.

Lösungen

3.1 a) $D = \mathbb{R}^+$ (Distanz/km)
$Z = \mathbb{R}^+$ (Fahrpreis/CHF)
$B = \{y: y \in \mathbb{R}^+ \text{ und } y > 8\}$

b) ...

3.2 $a = 1.5$, $b = 8$

3.3 ...

3.4 a) Steigung $a = 0$, Achsenabschnitt $b = -2$

b) Steigung $a = 2$, Achsenabschnitt $b = -6$

c) Steigung $a = -1$, Achsenabschnitt $b = 3$

3.5 a) 25 CHF

b) 5250 CHF

c) $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto y = f(x) = ax + b$

mit: x = Anzahl Jahre seit Beginn
y = Kapital/CHF nach x Jahren

Steigung $a = 25$, Achsenabschnitt $b = 5000$

3.6 a) Jährlicher Zins $= i \cdot K_0$
Kapital K_n nach n Jahren $= K_0 + n \cdot (i \cdot K_0) = K_0\,(1 + ni)$

b) Steigung $a = i \cdot K_0$, Achsenabschnitt $b = K_0$

Hinweise:
- Vergleichen Sie die Formel $K_n = K_0\,(1 + ni)$ mit der allgemeinen Form der Funktionsgleichung einer linearen Funktion.
- $K_n = K_0\,(1 + ni) = an + b = f(n)$
- f mit $f(x) = ax + b$ ist eine lineare Funktion.

3.7 a) $n = \dfrac{\frac{K_n}{K_0} - 1}{i}$ mit $K_0 = 1200$ CHF, $K_n = 2000$ CHF, $i = 1.5\% = 0.015$

$\Rightarrow n = 44.4... \to 45$ Jahre

b) $i = \dfrac{\frac{K_n}{K_0} - 1}{n}$ mit $K_0 = 1200$ CHF, $K_n = 2000$ CHF

$n = 20 \Rightarrow i = 0.03333... = 3.333...\%$
$n = 19 \Rightarrow i = 0.03508... = 3.508...\%$

$\Rightarrow i \in \{3.35\%, 3.40\%, 3.45\%, 3.50\%\}$

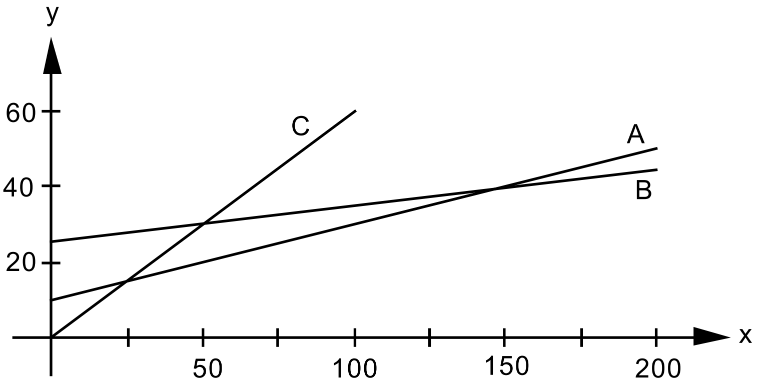
3.8 a) x = Gesprächsdauer/min
y = Gesamtgebühr/CHF

Tarif A: $A: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto y = A(x) = 0.2\,x + 10$

Tarif B: B: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto y = B(x) = 0.1\ x + 25$

Tarif C: C: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$
$x \mapsto y = C(x) = 0.6\ x$

Direkte Proportionalität: Die Gesamtgebühr ist direkt proportional zur Gesprächsdauer.



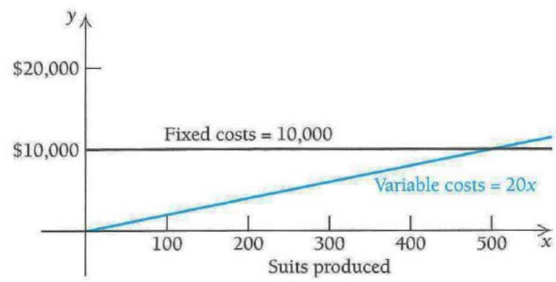
b) Tarif A: 22 CHF
Tarif B: 31 CHF
Tarif C: 36 CHF

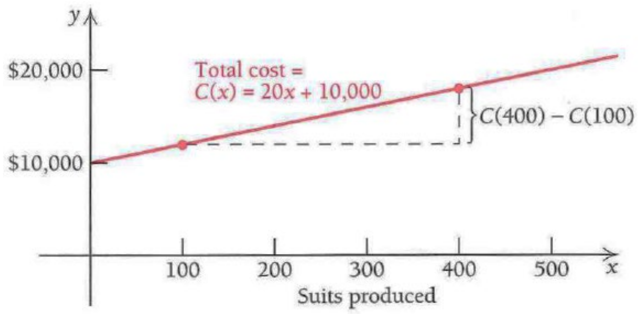
c) über 25 min

Hinweis:
- Lösen Sie die Gleichung A(x) = C(x) nach x.

d) über 150 min

3.9 a)





Übersetzung von Fachbegriffen

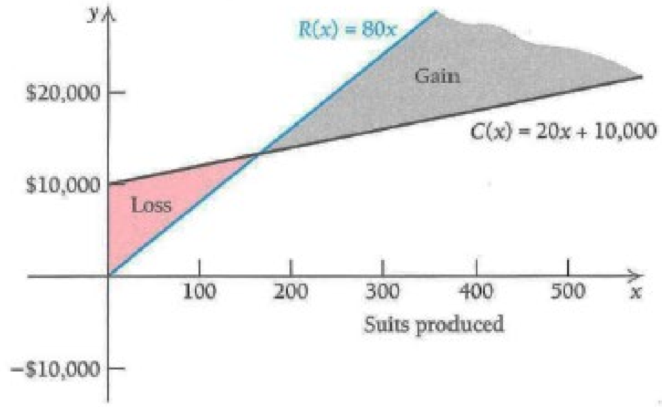
fixed costs	Fixkosten
variable costs	variable Kosten
total costs C(x)	Gesamtkosten K(x)

b) $K(100) = (20 \cdot 100 + 10'000)$ CHF $= 12'000$ CHF

$K(400) = (20 \cdot 400 + 10'000)$ CHF $= 18'000$ CHF

3.10

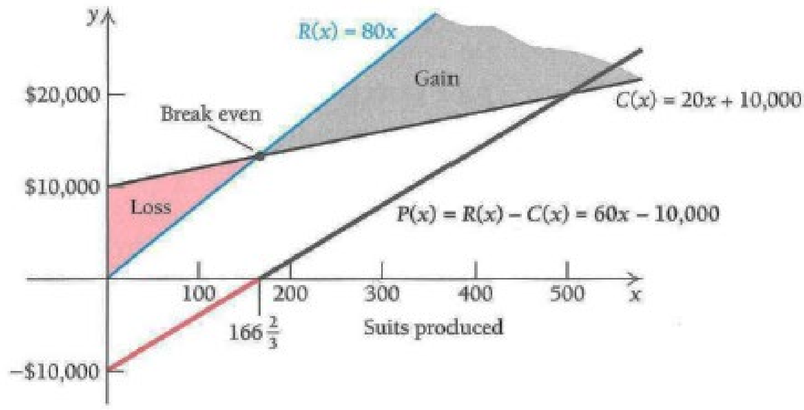
a) The graphs of $R(x) = 80x$ and $C(x) = 20x + 10{,}000$ are shown below. When $C(x)$ is above $R(x)$, a loss will occur. This is shown by the region shaded red. When $R(x)$ is above $C(x)$, a gain will occur. This is shown by the region shaded gray.



b) To find P, the profit function, we have

$$\begin{aligned} P(x) = R(x) - C(x) &= 80x - (20x + 10{,}000) \\ &= 60x - 10{,}000. \end{aligned}$$

The graph of $P(x)$ is shown by the heavy line. The red portion of the line shows a "negative" profit, or loss. The black portion of the heavy line shows a "positive" profit, or gain.



c) To find the break-even value, we solve $R(x) = C(x)$:

$$\begin{aligned} R(x) &= C(x) \\ 80x &= 20x + 10{,}000 \\ 60x &= 10{,}000 \\ x &= 166\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

How do we interpret the fractional answer, since it is not possible to produce $\frac{2}{3}$ of a suit? We simply round to 167. Estimates of break-even values are usually sufficient since companies want to operate well away from break-even values in order to maximize profit.

Übersetzung von Fachbegriffen

loss	Verlust
gain P(x)	Gewinn G(x)
revenue R(x)	Ertrag E(x)
break-even	Gewinnschwelle

3.11 a) 2. Aussage

b) 4. Aussage

c) 3. Aussage