

## Aufgaben 7      Quadratische Funktion und Gleichungen Quadr. Funktion/Gleichungen, Angebot, Nachfrage, Marktgleichgewicht

### Lernziele

- den Zusammenhang zwischen einer quadratischen Funktion und einer quadratischen Gleichung kennen und verstehen.
- eine quadratische Gleichung mit der Methode der quadratischen Ergänzung lösen können.
- eine quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel lösen können.
- spezielle quadratische Gleichungen ohne Lösungsformel lösen können.
- eine quadratische Gleichung mit einem Parameter lösen können.
- die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten des Scheitelpunktes und den Koordinaten eines weiteren Punktes der dazugehörigen Parabel bestimmen können.
- die allgemeine Form einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten dreier Punkte der dazugehörigen Parabel bestimmen können.
- angewandte Problemstellungen aus dem Bereich Volks- und Betriebswirtschaft mit Hilfe von quadratischen Gleichungen oder Gleichungssystemen bearbeiten können.

### Aufgaben

7.1 Jede quadratische Gleichung kann in die folgende allgemeine Form umgeformt werden:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

Bestimmen Sie die Anzahl Lösungen, die eine quadratische Funktion haben kann, d.h. versuchen Sie, die verschiedenen Fälle für die Anzahl Lösungen herauszufinden.

Hinweise:

- Erinnern Sie sich an unsere Diskussion über die mögliche Anzahl Lösungen einer linearen Gleichung.
- Vergleichen Sie die linke Seite der quadratischen Gleichung (\*) mit der allgemeinen Form der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion.
- Stellen Sie sich den Grafen einer quadratischen Funktion vor.

7.2 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen ...

- i) ... mit der Methode der quadratischen Ergänzung.
- ii) ... mit Hilfe der Lösungsformel.

Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a)  $x^2 + 10x + 24 = 0$                       b)  $2x^2 - 7x + 3 = 0$   
c)  $x^2 + 2x + 8 = 0$                       d)  $x^2 - 14x + 49 = 0$

7.3 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a)  $x^2 + 22x + 121 = 0$                       b)  $5x^2 + 8x - 4 = 0$   
c)  $5x^2 - 8x + 4 = 0$                       d)  $24x^2 - 65x + 44 = 0$   
e)  $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$                       f)  $-9x^2 - 54x - 63 = 0$

7.4 (siehe nächste Seite)

7.4 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a)	$9(x - 10) - x(x - 15) = x$	b)	$3(x^2 + 2) - x(x + 9) = 11$
c)	$y^3 + 19 = (y + 4)^3$	d)	$\frac{9x - 8}{4x + 7} = \frac{3x}{2x + 5}$
e)	$\frac{x^2}{x - 6} - \frac{6x}{6 - x} = 1$	f)	$\frac{8}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} = 3x - 1$

7.5 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen, ohne die Lösungsformel zu verwenden. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a)	$(x + 2)(x + 5) = 0$	b)	$(x - 8)(5x - 9) = 0$
c)	$x^2 - 3x = 0$	d)	$x^2 + 7x = 0$
e)	$4x^2 - 9 = 0$	f)	$100x^2 - 1 = 0$
g)	$3x^2 = 27$	h)	$x^2 = x$

7.6 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a)	$(7 + x)(7 - x) = (3x + 2)^2 - (2x + 3)^2$	b)	$(x - 3)(2x - 7) = 1$
c)	$\frac{x - 4}{x - 5} = \frac{30 - x^2}{x^2 - 5x}$	d)	$\frac{x^2 - x - 2}{2 - x} = 1$
e)	$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = 0$	f)	$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = 1$

7.7 Die folgenden quadratischen Gleichungen enthalten einen Parameter p. Die Lösungsmenge der Gleichungen hängt daher vom Wert dieses Parameters ab.

Lösen Sie die Gleichungen nach x.

a)	$x^2 + x + p = 0$	b)	$3x^2 + px - p = 0$
----	-------------------	----	---------------------

7.8 Eine Parabel hat den Scheitelpunkt S und enthält den Punkt P.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion sowohl in der Scheitelpunktsform als auch in der allgemeinen Form.

a)	S(2 4)	P(-1 7)
b)	S(1 -8)	P(2 -7)

7.9 Eine Parabel enthält die drei Punkte P, Q und R.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion in der allgemeinen Form.

a)	P(-4 8)	Q(0 0)	R(10 15)
b)	P(1 -1)	Q(2 4)	R(4 8)

7.10 Bestimmen Sie zu den gegebenen Angebots- und Nachfragefunktionen  $f_A$  und  $f_N$  einer Dienstleistung die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis:

a)	Angebot	$p = f_A(q) = \left(\frac{1}{4}q^2 + 10\right) \text{ CHF}$
	Nachfrage	$p = f_N(q) = (86 - 6q - 3q^2) \text{ CHF}$
b)	Angebot	$p = f_A(q) = (q^2 + 8q + 16) \text{ CHF}$
	Nachfrage	$p = f_N(q) = (-3q^2 + 6q + 436) \text{ CHF}$

- 7.11 Die Gesamtkosten  $K(x)$  bei der Produktion von  $x$  Artikeln und der Ertrag  $E(x)$  beim Verkauf von  $x$  Artikeln sind gegeben durch

$$K(x) = (2000 + 40x + x^2) \text{ CHF}$$
$$E(x) = 130x \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Stückzahl(en)  $x$  für die Gewinnschwelle(n).

- 7.12 Die Gesamtkosten  $K(x)$  bei der Produktion von  $x$  Artikeln und der Ertrag  $E(x)$  beim Verkauf von  $x$  Artikeln sind gegeben durch

$$K(x) = (x^2 + 100x + 80) \text{ CHF}$$
$$E(x) = (160x - 2x^2) \text{ CHF}$$

Wieviele Artikel müssen hergestellt und verkauft werden, damit ein Gewinn von 200 CHF erzielt wird?

- 7.13 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Eine quadratische Gleichung ...

- ... hat keine Lösung, wenn sich der Scheitelpunkt des Grafen der entsprechenden quadratischen Funktion unterhalb der  $x$ -Achse befindet.
- ... hat immer eine oder zwei Lösungen.
- ... hat genau eine Lösung, falls der Scheitelpunkt des Grafen der entsprechenden quadratischen Funktion auf der  $x$ -Achse liegt.
- ... kann unendlich viele Lösungen haben.

b) Der Graf einer quadratischen Funktion ...

- ... ist eindeutig, wenn der Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt des Grafen bekannt sind.
- ... ist eine Gerade, falls die entsprechende quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.
- ... ist eine quadratische Gleichung.
- ... kann durch Lösen einer quadratischen Gleichung bestimmt werden.

c) Falls die Gesamtkostenfunktion quadratisch und die Gesamtertragsfunktion linear ist, dann ...

- ... gibt es immer genau eine Gewinnschwelle.
- ... entspricht eine Gewinnschwelle der Lösung einer quadratischen Gleichung.
- ... kann kein Gewinn realisiert werden, wenn die lineare Funktion eine positive Steigung hat.
- ... kann der Scheitelpunkt des Grafen der Kostenfunktion nicht unterhalb der  $x$ -Achse liegen.