

Aufgaben 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lernziele

- die allgemeine Lösung einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für alle drei Fälle für die Lösungen der charakteristischen Gleichung bestimmen können.
- ein Anfangswertproblem mit einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von Hand lösen können.

Aufgaben

- 5.1 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
1, 6, 7 (Seite 530)

Hinweise zur Aufgabe 6:

- Betrachten Sie die charakteristische Gleichung.
- Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung können direkt aus der GDGL abgelesen werden.
- Lösen Sie die charakteristische Gleichung nach der Unbekannten λ .
- Die allgemeine Lösung der GDGL kann mit Hilfe der Lösung(en) der charakteristischen Gleichung direkt hingeschrieben werden.

Hinweise zur Aufgabe 7:

- Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung der GDGL. Gehen Sie gleich vor wie in der Aufgabe 6.
- Bestimmen Sie dann die partikuläre Lösung des AWP durch Einsetzen der AB in die allgemeine Lösung.

- 5.2 Die homogene lineare GDGL 2. Grades $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ mit konstanten Koeffizienten a und b besitzt für den Fall $a^2 - 4b < 0$ die folgenden beiden komplexen Basislösungen $\tilde{y}_1(x)$ und $\tilde{y}_2(x)$ (siehe Unterricht):

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x + i\omega x} = e^{\alpha x} e^{i\omega x} \qquad \tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x - i\omega x} = e^{\alpha x} e^{-i\omega x}$$

mit $\alpha := -\frac{a}{2}$ und $\omega := \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$

Aus der komplexen Lösung $\tilde{y}_1(x)$ können die beiden folgenden reellen Basislösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gefunden werden (siehe Unterricht):

$$y_1(x) = \operatorname{Im}(\tilde{y}_1(x)) = e^{\alpha x} \sin(\omega x) \qquad y_2(x) = \operatorname{Re}(\tilde{y}_1(x)) = e^{\alpha x} \cos(\omega x)$$

Die allgemeine Lösung $y(x)$ der GDGL lautet daher wie folgt:

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)) \quad (1)$$

- a) Zeigen Sie, dass $y(x)$ auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$y(x) = C e^{\alpha x} \sin(\omega x + \varphi) \quad (2)$$

Hinweise:

- Gehen Sie von (2) aus: Formen Sie (2) um, bis Sie (1) erhalten.
- Verwenden Sie ein Additionstheorem aus der Trigonometrie.

- b) Bestimmen Sie, wie C und φ aus C_1 und C_2 berechnet werden können.

Hinweis:

- C und φ können als Polarkoordinaten $(C \mid \varphi)$ eines Punktes auf einer Ebene mit den kartesischen Koordinaten $(C_1 \mid C_2)$ aufgefasst werden.

- 5.3 Führen Sie in Moodle den [Test 5](#) durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- 3.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Seiten 392 und 393)
- 3.2 Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung (Seiten 393 bis 400)
- 3.3 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung (Seiten 400 bis 406)