Aufgaben 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung
Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lernziele

- die allgemeine Lösung einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für alle drei Fälle für die Lösungen der charakteristischen Gleichung bestimmen können.
- ein Anfangswertproblem mit einer homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von Hand lösen können.

Aufgaben

5.1 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
1, 6, 7 (Seite 530)

Hinweise zur Aufgabe 6:
- Betrachten Sie die charakteristische Gleichung.
- Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung können direkt aus der GDGL abgelesen werden.
- Lösen Sie die charakteristische Gleichung nach der Unbekannten λ.
- Die allgemeine Lösung der GDGL kann mit Hilfe der Lösung(en) der charakteristischen Gleichung direkt hingeschrieben werden.

Hinweise zur Aufgabe 7:
- Bestimmen Sie zuerst die allgemeine Lösung der GDGL. Gehen Sie gleich vor wie in der Aufgabe 6.
- Bestimmen Sie dann die partikuläre Lösung des AWP durch Einsetzen der AB in die allgemeine Lösung.

5.2 Die homogene lineare GDGL 2. Grades $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ mit konstanten Koeffizienten a und b besitzt für den Fall $a^2 - 4b < 0$ die folgenden beiden komplexen Basislösungen $\tilde{y}_1(x)$ und $\tilde{y}_2(x)$ (siehe Unterricht):

$$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x + i\omega x} = e^{\alpha x}\, e^{i\omega x} \qquad \tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x - i\omega x} = e^{\alpha x}\, e^{-i\omega x}$$

mit $\alpha := -\frac{a}{2}$ und $\omega := \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$

Aus der komplexen Lösung $\tilde{y}_1(x)$ können die beiden folgenden reellen Basislösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gefunden werden (siehe Unterricht):

$$y_1(x) = \mathrm{Im}\left(\tilde{y}_1(x)\right) = e^{\alpha x} \sin(\omega x) \qquad y_2(x) = \mathrm{Re}\left(\tilde{y}_1(x)\right) = e^{\alpha x} \cos(\omega x)$$

Die allgemeine Lösung y(x) der GDGL lautet daher wie folgt:

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)\right) \qquad (1)$$

a) Zeigen Sie, dass y(x) auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$y(x) = C\, e^{\alpha x} \sin(\omega x + \varphi) \qquad (2)$$

Hinweise:
- Gehen Sie von (2) aus: Formen Sie (2) um, bis Sie (1) erhalten.
- Verwenden Sie ein Additionstheorem aus der Trigonometrie.

b) Bestimmen Sie, wie C und φ aus C_1 und C_2 berechnet werden können.

Hinweis:
- C und φ können als Polarkoordinaten $(C \mid \varphi)$ eines Punktes auf einer Ebene mit den kartesischen Koordinaten $(C_1 \mid C_2)$ aufgefasst werden.

5.3 Führen Sie in Moodle den Test 5 durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

3.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (Seiten 392 und 393)

3.2 Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung (Seiten 393 bis 400)

3.3 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung (Seiten 400 bis 406)

Lösungen

5.1 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seiten 761 und 762)

5.2 …

5.3 -