Aufgaben 3 — Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung Separation der Variablen

Lernziele

- die allgemeine Lösung einer separierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen bestimmen können.
- ein Anfangswertproblem mit einer separierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen lösen können.
- das Anfangswertproblem für ein konkretes Torricelli-Problem formulieren und lösen können.
- die Stabilität einer statischen Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Hilfe des Richtungsfeldes beurteilen können.
- das Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit einem Plotter aus dem Internet darstellen können.
- mit Hilfe des Richtungsfeldes beurteilen können, ob eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung elementar integrierbar ist.
- verstehen, inwiefern aus dem Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung beurteilt werden kann, ob die Differentialgleichung separierbar ist.

Aufgaben

3.1

Finden Sie jeweils die *allgemeine Lösung* der gegebenen ODE mit Hilfe der Methode der *Separation der Variablen*. Achten Sie darauf, dass Sie keine *Lösungen* übersehen.

a) $y' = 2y$ **c)** $y' = y^2$ **e)** $y' = 1 + y^2$

b) $y' = x\,y$ **d)** $y' = x^2y^3$ **f)** $y' = 3x^2y + x^2$

3.2

Lösen Sie jeweils das gegebene IVP mit Hilfe der Methode der *Separation der Variablen*.

a) $\begin{cases} \text{ODE:} & y' - xy^2 = x \\ \text{IC:} & y(0) = 1. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \text{ODE:} & y' - 2\sqrt{y} = 0 \\ \text{IC:} & y(2) = 9. \end{cases}$

Bem.:
- «IVP» bedeutet «**I**nitial **V**alue **P**roblem» (deutsch: Anfangswertproblem).
- «IC» bedeutet «**I**nitial **C**onditions» (deutsch: Anfangsbedingungen).

3.3 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
4, 5 (Seiten 524 und 525, „Zu Abschnitt 2“)

3.4 Betrachten Sie das folgende AWP für die Fallgeschwindigkeit v = v(t) eines Felsbrockens (vgl. Unterricht in der ersten Semesterwoche):

GDGL: $\dot{v} = g - \frac{k}{m}v^2$
AB: $v(0\text{ s}) = 0\text{ m/s}$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der GDGL.

Hinweise:
- Die GDGL ist separierbar.
- Eines der auftretenden Integrale kann (bis auf einen konstanten Vorfaktor) auf die folgende Form gebracht werden:
$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx$ (Formelsammlung Papula, Integral (46), Seite 480)

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für das ganze AWP.

Nehmen Sie für die nächsten Teilaufgaben die folgenden Zahlenwerte an:

$g = 9.81$ N/kg $m = 300$ kg $k = 0.80$ Ns^2/m^2

c) Stellen Sie das Richtungsfeld der GDGL mit einem Plotter aus dem Internet dar.

d) Beurteilen Sie mit Hilfe des in b) geplotteten Richtungsfeldes die Stabilität der statischen Lösung(en) der GDGL.

e) Plotten Sie den Grafen der in b) bestimmten speziellen Lösung des AWP mit einem Plotter aus dem Internet.

f) Stellen Sie das Richtungsfeld der GDGL aus c) und die spezielle Lösung des AWP aus e) in einer gemeinsamen Grafik dar. Überprüfen Sie grafisch, dass die spezielle Lösung des AWP die GDGL erfüllt.

3.5 Betrachten Sie einen mit Wasser gefüllten, oben offenen, aufrecht stehenden, zylindrischen Stahltank mit Radius 2.00 m und Höhe 7.00 m. Am unteren Ende des Tanks befindet sich ein offenes Ausflussrohr mit Radius 5.0 cm.

Der Wassertank wird entleert, wobei während der ganzen Zeit oben kein Wasser in den Tank hinein fliesst.

a) Formulieren Sie ein AWP für den Wasserstand $h(t)$ im Tank.

Hinweis:
- Gehen Sie von der im Unterricht hergeleiteten GDGL für das Torricelli-Problem aus.

b) Bestimmen Sie die statische(n) Lösung(en) der GDGL.

c) Stellen Sie das Richtungsfeld für die in a) formulierte GDGL mit einem Plotter aus dem Internet dar.

d) Beurteilen Sie mit Hilfe des in c) geplotteten Richtungsfeldes die Stabilität der in b) bestimmten statischen Lösung(en).

e) Bestimmen Sie die Lösung des in a) formulierten AWP.

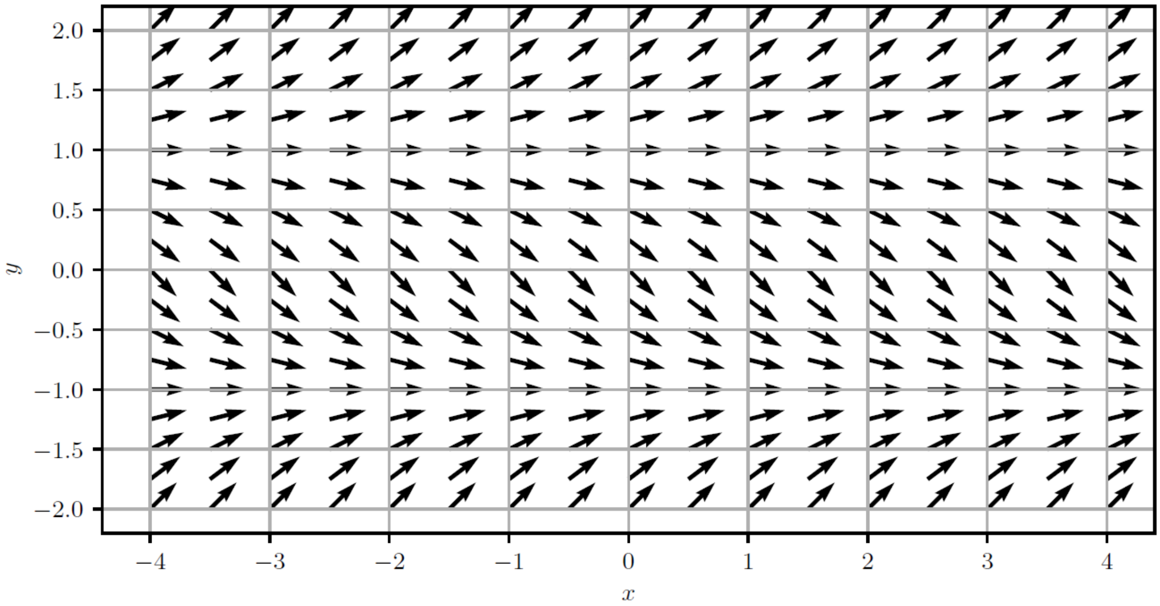
Hinweis:
- Es stellt sich heraus, dass die gesuchte Lösung nicht für alle Zeitpunkte t definiert ist.

f) Plotten Sie den Grafen der in e) bestimmten speziellen Lösung des AWP mit einem Plotter aus dem Internet.

g) Bestimmen Sie, wie lange es dauert, bis der Tank vollständig entleert ist.

3.6 (siehe nächste Seite)

3.6 Gegeben ist das folgende Richtungsfeld einer GDGL 1. Ordnung:



Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

		wahr	falsch
a)	Das Richtungsfeld visualisiert eine elementar integrierbare GDGL.	☐	☐
b)	Das Richtungsfeld visualisiert eine separierbare GDGL.	☐	☐
c)	Die Lösung durch den Punkt (-20; 0.9) nähert sich für x immer mehr dem Wert -1 an.	☐	☐
d)	Die Funktion y(x) = 1 ist eine stabile statische Lösung.	☐	☐
e)	Bei jeder separierbaren GDGL kann man aus dem Richtungsfeld einfach erkennen, dass die GDGL separierbar ist.	☐	☐

3.7 Führen Sie in Moodle den Test 3 durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen (Seiten 358 bis 362)