

Aufgaben 2 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung Statische Lösungen, Richtungsfeld, Stabilität

Lernziele

- eine statische Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen können.
- das Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung von Hand skizzieren können.
- das Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit einem Plotter aus dem Internet darstellen können.
- die Stabilität einer statischen Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Hilfe des Richtungsfeldes beurteilen können.
- mit Hilfe des Richtungsfeldes beurteilen können, ob eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung elementar integrierbar ist.

Aufgaben

2.1 Bestimmen Sie die **statischen Lösungen** der folgenden GDGL:

- | | |
|-------------------|---|
| a) $y' = 0$ | b) $y' = 1$ |
| c) $y' = y$ | d) $y' = x$ |
| e) $y' = 1 - y$ | f) $y' = y^2 - y - 2$ |
| g) $y' = y $ | h) $y' = y (y + 1)$ |
| i) $y'' + y' = 1$ | j) $\ddot{s} + a \cdot \dot{s} + b \cdot s = c$ (a, b, c: Konstanten $\neq 0$) |

2.2 Bestimmen Sie für die GDGL in den Aufgaben 2.1 a) bis h) jeweils das **Richtungsfeld**.

- Skizzieren Sie das Richtungsfeld von Hand.
- Stellen Sie das Richtungsfeld mit einem Plotter aus dem Internet dar.
Vergleichen Sie den Plot mit dem in a) von Hand skizzierten Richtungsfeld.

2.3 Beurteilen Sie für die GDGL in den Aufgaben 2.1 a) bis h) die **Stabilität** (stabil, instabil, semistabil) der jeweiligen statischen Lösungen mit Hilfe des jeweiligen Richtungsfeldes.

Hinweise:

- Die statischen Lösungen haben Sie bereits in der Aufgabe 2.1 bestimmt.
- Die Richtungsfelder haben Sie bereits in der Aufgabe 2.2 bestimmt.

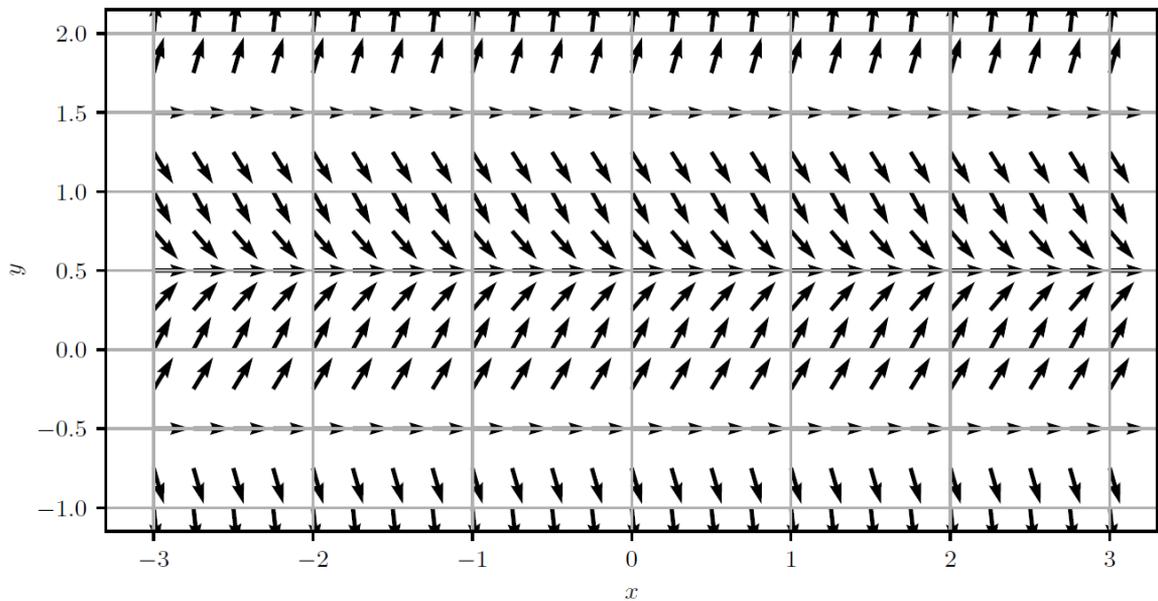
2.4 Betrachten Sie die folgende GDGL 1. Ordnung:

$$y' = f(x,y) \quad \text{mit} \quad f(x,y) = 1 - y^2$$

- Bestimmen Sie die statischen Lösungen.
- Skizzieren Sie das Richtungsfeld von Hand.
- Stellen Sie das Richtungsfeld mit einem Plotter aus dem Internet dar.
Vergleichen Sie den Plot mit dem in b) von Hand skizzierten Richtungsfeld.
- Beurteilen Sie die Stabilität der in a) bestimmten statischen Lösungen.

2.5 (siehe nächste Seite)

2.5 Gegeben ist das folgende Richtungsfeld einer GDGL 1. Ordnung:



Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
 Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

- | | wahr | falsch |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Die Lösung durch den Punkt (1.25 ; 1.25) nähert sich für x immer mehr dem Wert 0.5 an. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Die Funktion $y(x) = 1.5$ ist eine stabile statische Lösung. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Das Richtungsfeld visualisiert eine GDGL, welche geschrieben werden kann als $y' = ay^2 + by + c$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Das Richtungsfeld visualisiert eine elementar integrierbare GDGL. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Wenn $y = g(x)$ eine Lösung der GDGL ist, dann ist auch $y = h(x) := g(x - c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

2.6 Führen Sie in Moodle den [Test 2](#) durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Geometrische Betrachtungen (Seiten 355 bis 358)

Lösungen

- 2.1
- a) $y_s(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$)
 - b) keine statische Lösungen
 - c) $y_s(x) = 0$
 - d) keine statische Lösungen
 - e) $y_s(x) = 1$
 - f) $y_{s1}(x) = -1$
 $y_{s2}(x) = 2$
 - g) $y_s(x) = 0$
 - h) $y_{s1}(x) = 0$
 $y_{s2}(x) = -1$
 - i) keine statische Lösungen
 - j) $s_s(t) = \frac{c}{b}$
- 2.2 ...
- 2.3
- a) $y_s(x) = c$ alle weder stabil, instabil noch semistabil
 - b) -
 - c) $y_s(x) = 0$ instabil
 - d) -
 - e) $y_s(x) = 1$ stabil
 - f) $y_{s1}(x) = -1$ stabil
 $y_{s2}(x) = 2$ instabil
 - g) $y_s(x) = 0$ semistabil
 - h) $y_{s1}(x) = 0$ semistabil
 $y_{s2}(x) = -1$ instabil
- 2.4
- a) $y_{s1}(x) = -1$
 $y_{s2}(x) = 1$
 - b) ...
 - c) (siehe b))
 - d) $y_{s1}(x) = -1$ instabil
 $y_{s2}(x) = 1$ stabil
- 2.5
- a) wahr
 - b) falsch
 - c) falsch
 - d) falsch
 - e) wahr
- 2.6 -