

Aufgaben 1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung Grundbegriffe

Lernziele

- wissen und verstehen, was eine gewöhnliche Differentialgleichung ist.
- Anwendungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Physik kennen.
- wissen und verstehen, was eine explizite und eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung ist.
- nachprüfen können, ob eine gegebene Funktion eine Lösung einer gegebenen gewöhnlichen Differentialgleichung ist.
- wissen und verstehen, was eine elementar integrierbare gewöhnliche Differentialgleichung ist.
- die allgemeine Lösung einer elementar integrierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung bestimmen können.
- wissen und verstehen, was ein Anfangswert- und ein Randwertproblem ist.
- ein Anfangs- oder Randwertproblem mit einer elementar integrierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung analytisch lösen können.

Aufgaben

1.1

Prüfen Sie nach, dass die gegebenen *Funktionen* jeweils eine *Lösung* der gegebenen ODE 1. Grades sind.

a) ODE: $y' = 0$

$$y_1(x) = 0; \quad y_2(x) = -7$$

b) ODE: $y' = y$

$$y_1(x) = e^x; \quad y_2(x) = 3e^x$$

c) ODE: $y' = 2y$

$$y_1(x) = e^{2x}; \quad y_2(x) = 4e^{2x}$$

d) ODE: $y' = 1 + y^2$

$$y_1(x) = \tan(x); \quad y_2(x) = \tan(x + 1)$$

e) ODE: $y'y = 1$

$$y_1(x) = \sqrt{2x}; \quad y_2(x) = \sqrt{2x - 3}$$

f) ODE: $(1 + y^2) + (1 + x^2) \cdot y' = 0$

$$y(x) = \frac{k - x}{1 + kx}$$

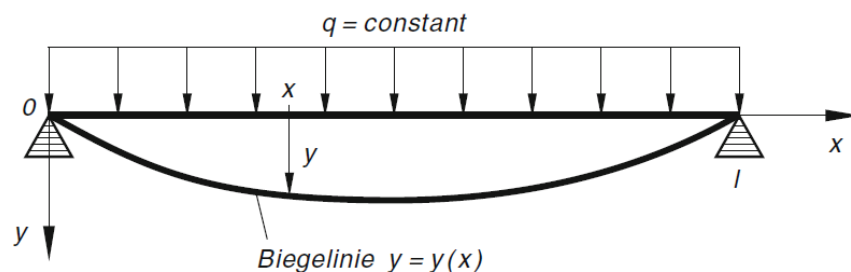
Bem.:

- «ODE» bedeutet «**Ordinary Differential Equation**» (deutsch: Gewöhnliche Differentialgleichung).

1.2 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:

1, 2, 4 (Seiten 523 und 524, „Zu Abschnitt 1“)

1.3 Betrachten Sie die Biegelinie $y = y(x)$ eines an beiden Enden aufliegenden, gleichmässig belasteten Balkens:



Die Biegelinie $y(x)$ erfüllt das folgende Randwertproblem RWP:

$$y'' = -\frac{q}{2EI} (lx - x^2), \quad y(0) = y(l) = 0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Lösen Sie das RWP. Bestimmen Sie also diejenige spezielle/partikuläre Lösung $y(x)$ der GDGL, welche auch die RB erfüllt.

Hinweis:

- Die GDGL ist elementar integrierbar.

1.4

Überprüfen Sie jeweils die angegebene Lösung der DGL:

(a) $y'(x) = 6x^2 - 5$ hat die partikuläre Lösung $y(x) = 2x^3 - 5x - 8$.

(b) $y'' - 25y = 0$ hat die allgemeine Lösung $y = C_1 \cdot e^{5x} + C_2 \cdot e^{-5x}$.

(c) $y^4 e^{2x} + \frac{dy}{dx} = 0$ hat die allgemeine Lösung $y = \left(\frac{2}{3e^{2x} - K} \right)^{1/3}$.

(d) (fehlt)

(e) $L \frac{di}{dt} + Ri = u_0$ hat die partikuläre Lösung $i(t) = \frac{u_0}{R} [1 - e^{-(R/L)t}]$.

(f) $x^{(3)}(t) - 2\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$ hat die allg. Lösung $x(t) = A \cdot e^t + B \cdot e^{-2t} + C \cdot e^{3t}$.

1.5 Führen Sie in Moodle den [Test 1](#) durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

1 Grundbegriffe

1.1 Ein einführendes Beispiel (Seiten 343 und 344)

1.2 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung (Seite 345)

1.3 Lösung einer Differentialgleichung (Seiten 345 bis 348)

1.5 Anfangswert- und Randwertprobleme (Seiten 351 bis 354)

Lösungen

1.1

- a) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 0; \quad y_1(x) = 0, \quad y_2(x) = -7.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x) = 0}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) = 0}}.$$

- b) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = y; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = 3e^x.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x) = e^x = y_1(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) = 3e^x = y_2(x)}}.$$

- c) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 2y; \quad y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = 4e^{2x}.$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x) = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot y_1(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) = 4 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot y_2(x)}}.$$

- d) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y' = 1 + y^2; \quad y_1(x) = \tan(x), \quad y_2(x) = \tan(x + 1).$$

Es gilt

$$\underline{\underline{y_1'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + y_1^2(x)}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) = 1 + \tan^2(x + 1) = 1 + y_2^2(x)}}.$$

- e) Wir betrachten eine ODE und zwei *Funktionen*, nämlich

$$y'y = 1; \quad y_1(x) = \sqrt{2x}, \quad y_2(x) = \sqrt{2x - 3}.$$

Es gilt

$$y_1'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{und} \quad y_2'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x - 3}} = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}$$

und somit

$$\underline{\underline{y_1'(x) \cdot y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{2x} = 1}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{y_2'(x) \cdot y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}} \cdot \sqrt{2x - 3} = 1}}.$$

- f) Wir betrachten eine ODE und eine *Funktion*, nämlich

$$(1 + y^2) + (1 + x^2) \cdot y' = 0; \quad y(x) = \frac{k - x}{1 + kx}.$$

Durch *Ableiten* mit Hilfe der *Quotienten-Regel* finden wir

$$y'(x) = \frac{(0 - 1) \cdot (1 + kx) - (k - x) \cdot (0 + k)}{(1 + kx)^2} = \frac{-1 - kx - k^2 + xk}{(1 + kx)^2} = -\frac{1 + k^2}{(1 + kx)^2}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} D &= \underline{(1 + y^2(x))} + (1 + x^2) \cdot y'(x) = 1 + \left(\frac{k - x}{1 + kx} \right)^2 + (1 + x^2) \cdot \left(-\frac{1 + k^2}{(1 + kx)^2} \right) \\ &= \frac{(1 + kx)^2}{(1 + kx)^2} + \frac{(k - x)^2}{(1 + kx)^2} - \frac{(1 + x^2) \cdot (1 + k^2)}{(1 + kx)^2} \\ &= \frac{(1 + kx)^2 + (k - x)^2 - (1 + x^2) \cdot (1 + k^2)}{(1 + kx)^2} \\ &= \frac{1 + 2kx + k^2x^2 + k^2 - 2kx + x^2 - (1 + x^2 + k^2 + x^2k^2)}{(1 + kx)^2} \\ &= \frac{1 + k^2x^2 + k^2 + x^2 - 1 - x^2 - k^2 - x^2k^2}{(1 + kx)^2} = \frac{0}{(1 + kx)^2} = \underline{0}. \end{aligned}$$

1.2 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seite 752, «Abschnitt 1»)

1.3 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seite 354)

1.4

Selbstkontrolle: Alle angegebenen Lösungen stimmen beim Einsetzen, und die Anzahl Parameter bei einer allgemeinen Lösung stimmt jeweils mit der Ordnung der DGL überein.

1.5 -