Aufgaben 12 Funktionen mehrerer Variablen
Richtungsableitungen, Lokale Extrema, Sattelpunkte

Lernziele

- eine erste Richtungsableitung einer Funktion von zwei Variablen bestimmen können.
- die Zusammenhänge zwischen der Steigung des Grafen, der Richtung des Gradienten und der Ausrichtung der Niveaulinie an einer bestimmten Stelle bei einer Funktion von zwei Variablen kennen und verstehen.
- eine zweite Richtungsableitung einer Funktion von zwei Variablen mit Hilfe der Hesse-Matrix bestimmen können.
- alle lokale Maxima, lokale Minima und Sattelpunkte einer Funktion von zwei Variablen bestimmen können.

Aufgaben

12.1 Bestimmen Sie für die angegebenen Funktionen f die …

i) … **erste** Richtungsableitung an der Stelle $(x_0,y_0) = (1,-1)$ in Richtung $\vec{v} = \binom{3}{4}$:

ii) … **zweite** Richtungsableitung an der Stelle $(x_0,y_0) = (1,-1)$ in die Richtungen $\vec{v}_1 = \binom{-3}{4}$ und $\vec{v}_2 = \binom{4}{3}$:

a) $f(x,y) = x^2 + 8y$

b) $f(x,y) = x^3 - x^2y + y^2$

12.2 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgende Aufgabe:
24 (Seite 335)

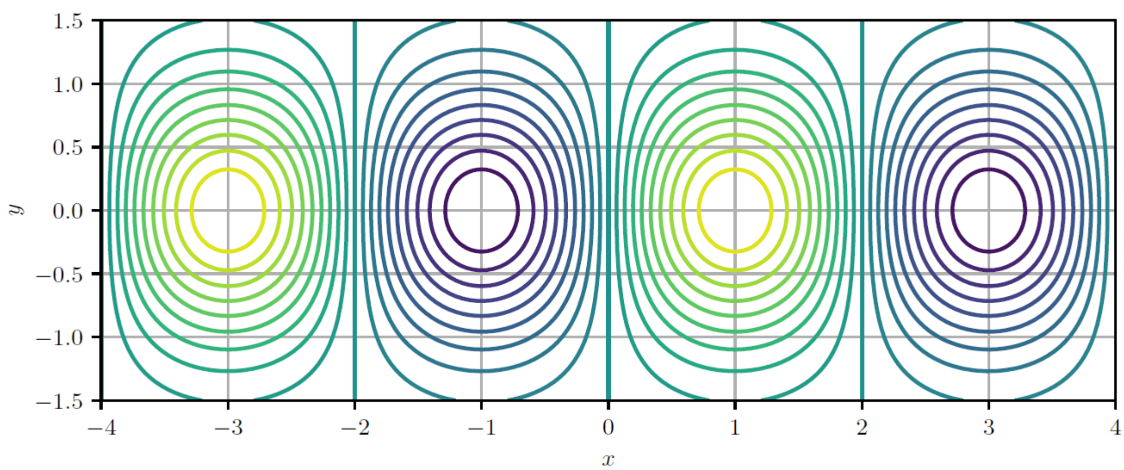
Hinweis:
- Im Lehrbuch Papula 2 wird die Determinante der Hesse-Matrix mit Δ bezeichnet, also $\Delta := \det(H(x,y))$

12.3 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle lokalen Extrema und Sattelpunkte:

a) $f(x,y) = y^3 + x^2y - 3y + 8$

b) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 27y + 4$

12.4 Gegeben ist der folgende Plot mit Niveaulinien einer Funktion f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welcher mit Python/Numpy mit dem Befehl `contour` unter Verwendung der Standardfarbskala erzeugt wurde (gelb: hohe Werte, violett: tiefe Werte):



(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

		wahr	falsch
a)	f hat bei (1,0) ein lokales Maximum.	☐	☐
b)	f hat bei (2,0) einen Sattelpunkt.	☐	☐
c)	Der Gradient von f bei (-1,0) ist der Nullvektor.	☐	☐
d)	Bei (1,1.25) zeigt der Gradient von f in Richtung der positiven x-Achse.	☐	☐
e)	Der Gradient von f ist bei (-1,1.25) länger als bei (-2,0.5).	☐	☐

12.5 Führen Sie in Moodle den Test 12 durch.

Lehrbuch Papula 2

III Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

2 Partielle Differentiation

2.5 Anwendungen

2.5.3 Relative oder lokale Extremwerte (Seiten 245 bis 251)

Lösungen

12.1 …

12.2 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seiten 729 und 730)

Hinweis:
- Im Lehrbuch Papula 2 wird die Determinante der Hesse-Matrix mit Δ bezeichnet, also $\Delta := \det(H(x,y))$

12.3 …

12.4 a) wahr

b) falsch

c) wahr

d) falsch

e) falsch

12.5 -