Aufgaben 7 Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung Freie ungedämpfte harmonische Schwingungen

Lernziele

- die Kreisfrequenz einer freien ungedämpften harmonischen Schwingung aus der entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung herauslesen können.
- die allgemeine Lösung einer eine freie ungedämpfte harmonische Schwingung beschreibenden gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmen können.
- ein eine freie ungedämpfte harmonische Schwingung beschreibendes Anfangswertproblem lösen können.
- wissen und verstehen, dass die Schwingung eines Pendels nur näherungsweise harmonisch ist.
- die gewöhnliche Differentialgleichung für den Auslenkwinkel bei einem Pendel aufstellen, durch eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine freie ungedämpfte harmonische Schwingung annähern und lösen können.

Aufgaben

7.1 Die in a) bis d) gegebenen AWP beschreiben jeweils eine freie ungedämpfte harmonische Schwingung.

Bearbeiten Sie jeweils die folgenden Teilaufgaben:

i) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_0, die Frequenz f_0 und die Periodendauer T_0.

ii) Geben Sie die allgemeine Lösung der GDGL an, und zwar in den beiden Formen
$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$ und $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

iii) Bestimmen Sie die Lösung des AWP, und zwar in den beiden Formen
$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$ und $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

a) GDGL: $\ddot{x} + x = 0$
AB: $x(0) = 3$
$\dot{x}(0) = 0$

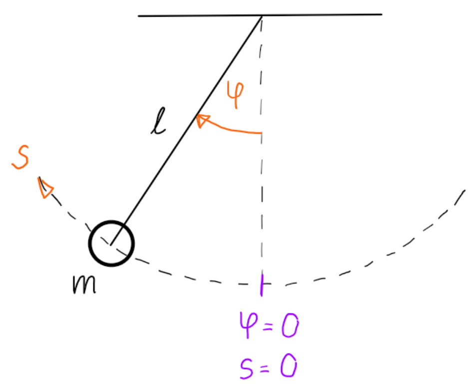
b) GDGL: $\ddot{x} + 4x = 0$
AB: $x(0) = 0$
$\dot{x}(0) = 8$

c) GDGL: $\ddot{x} + 9x = 0$
AB: $x(0) = 3$
$\dot{x}(0) = 12$

d) GDGL: $\ddot{x} + 49x = 0$
AB: $x(0) = 0$
$\dot{x}(0) = 0$

7.2 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
1, 2 (Seite 531)

7.3 Betrachten Sie das folgende Pendel:



(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Das Pendel besteht aus einem Körper der Masse m, welcher an einem als masselos angenommenen Pendelfaden der Länge *l* befestigt ist. Der Pendelkörper führt eine Schwingung auf einer kreisförmigen Bahn mit Radius *l* aus. Dabei soll jegliche Reibung (Aufhängung, Luftwiderstand) vernachlässigt werden.

Die momentane Lage des Pendelkörpers wird mit dem Winkel φ bzw. der Koordinate s ausgedrückt. Die Position $\varphi = 0$ bzw. $s = 0$ entspricht der Ruhelage des Pendels.

a) Betrachten Sie das Pendel in der **Ruhelage**, d.h. für $\varphi = 0$.

i) Erstellen Sie eine Skizze des Pendels.

ii) Zeichnen Sie in Ihrer Skizze alle Kräfte ein, die am Pendelkörper angreifen.

i) Zeichnen Sie in Ihrer Skizze die Resultierende aller auf den Pendelkörper wirkenden Kräfte ein.

b) Betrachten Sie das Pendel für eine **beliebige Auslenkung** $\varphi \neq 0$ ($|\varphi| < 90°$).

i) Erstellen Sie eine Skizze des Pendels.

ii) Zeichnen Sie in Ihrer Skizze alle Kräfte ein, die am Pendelkörper angreifen.

ii) Zeichnen Sie in Ihrer Skizze die Resultierende aller auf den Pendelkörper wirkenden Kräfte ein.

Hinweis:
- Unterscheiden Sie die folgenden beiden Fälle:
  1. Der Pendelkörper befindet sich gerade in einem der beiden oberen Umkehrpunkte ($v = 0$).
  2. Der Pendelkörper befindet sich zwischen den beiden oberen Umkehrpunkten ($v \neq 0$).

c) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die Schwingung des Pendels harmonisch ist oder nicht.

Hinweise:
- Bei einer harmonischen Schwingung ist die Resultierende aller auf den Schwingkörper angreifenden Kräfte (genauer: deren skalare Komponente in die Schwingrichtung) proportional zur Auslenkung des Schwingkörpers von der Ruhelage (siehe Kurs „Physik“).
- Da sich der Pendelkörper zwangsweise auf einer Kreisbahn bewegt, genügt es, von der Resultierenden $\vec{F}_{res}$ aller Kräfte nur die Komponente $\vec{F}_{res\,\parallel}$ zu betrachten, die tangential zur Kreisbahn gerichtet ist.
- Prüfen Sie also nach, ob die skalare tangentiale Komponente $F_{res\,\parallel}$ der Resultierenden $\vec{F}_{res}$ aller Kräfte proportional zum Winkel φ ist.

d) Stellen Sie eine GDGL für den Auslenkwinkel φ, d.h. für die Funktion $\varphi(t)$ auf.

Hinweise:
- Formulieren Sie für den Pendelkörper das aus der Physik bekannte Aktionsprinzip.
- Der Pendelkörper bewegt sich zwangsweise auf einer Kreisbahn. Daher kann man beim Aktionsprinzip die Beschleunigung $\ddot{s}$ entlang der Kreisbahn und bei der resultierenden Kraft deren skalare Komponente $F_{res\,\parallel}$ tangential zur Kreisbahn einsetzen.
- Überlegen Sie sich, wie die Grössen s und φ zusammenhängen.

e) Zeigen Sie, dass die in d) hergeleitete GDGL unter der Annahme kleiner Auslenkwinkel φ durch eine GDGL für eine freie ungedämpfte harmonische Schwingung angenähert werden kann.

f) Geben Sie die Kreisfrequenz ω_0 und die Periodendauer T_0 der entsprechenden harmonischen Schwingung an.

g) Geben Sie die allgemeine Lösung der in e) gefundenen GDGL für eine freie ungedämpfte harmonische Schwingung an.

7.4 Führen Sie in Moodle den [Test 7] durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

4 Anwendungen in der Schwingungslehre

4.1 Mechanische Schwingungen

4.1.1 Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik (Seiten 417 bis 420)

4.1.2 Freie ungedämpfte Schwingung (Seiten 420 bis 423)

Lösungen

7.1 …

7.2 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seite 760)

7.3 a)
- Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ zeigt senkrecht nach unten.
- Die Fadenkraft $\vec{F}_F$ zeigt entlang des Fadens senkrecht nach oben.
- Die Resultierende $\vec{F}_{res}$ aus Gewichts- und Fadenkraft ist der Nullvektor, falls der Pendelkörper in Ruhe ist, d.h. gar nicht schwingt.
- Die Resultierende $\vec{F}_{res}$ aus Gewichts- und Fadenkraft zeigt senkrecht nach oben („Zentripetalkraft“), falls der Pendelkörper nicht in Ruhe ist, d.h. tatsächlich schwingt.

b)
- Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ zeigt senkrecht nach unten.
- Die Fadenkraft $\vec{F}_F$ zeigt entlang des Fadens in Richtung des Aufhängepunktes.
- Die Resultierende $\vec{F}_{res}$ aus Gewichts- und Fadenkraft zeigt tangential zur Kreisbahn schräg nach unten, falls der Pendelkörper sich gerade in einem der oberen Umkehrpunkte befindet, d.h. gerade in Ruhe ist ($v = 0$).
- Die Resultierende $\vec{F}_{res}$ aus Gewichts- und Fadenkraft zeigt in den Innenbereich des Kreises, falls der Pendelkörper sich nicht gerade in einem der beiden oberen Umkehrpunkte befindet ($v \neq 0$). Sie setzt sich aus einer Komponente $\vec{F}_{res\,||}$ tangential zur Kreisbahn schräg nach unten und einer Komponente entlang des Fadens in Richtung des Aufhängepunktes zusammen.

c)
$F_{res\,||}$:= Skalare Komponente von $\vec{F}_{res\,||}$
($F_{res\,||} < 0$, falls $\varphi > 0$)
($F_{res\,||} > 0$, falls $\varphi < 0$)

$F_G := |\vec{F}_G|$

$F_{G\,||}$:= Skalare Komponente von $\vec{F}_{G\,||}$
($F_{G\,||} < 0$, falls $\varphi > 0$)
($F_{G\,||} > 0$, falls $\varphi < 0$)

$F_{res\,||} = F_{G\,||} = -F_G \sin(\varphi) \nsim \varphi$
$F_{res\,||}$ ist nicht proportional zum Auslenkwinkel φ. Der Pendelkörper führt also **keine harmonische Schwingung** aus.

für kleine φ: $\sin(\varphi) \approx \varphi$
$F_{res\,||} = F_{G\,||} = -F_G \sin(\varphi) \approx -F_G\,\varphi \sim \varphi$
$F_{res\,||}$ ist näherungsweise proportional zum Auslenkwinkel φ. Der Pendelkörper führt **näherungsweise eine harmonische Schwingung** aus.

d) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$

e) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

f) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

g) $\varphi(t) = C\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \phi\right)$

7.4 -