Aufgaben 6 — Gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung — Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lernziele

- eine partikuläre Lösung einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe eines Ansatzes bestimmen können.
- die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten bestimmen können.
- die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Python/Sympy bestimmen können.
- ein Anfangswertproblem mit einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von Hand lösen können.
- ein Anfangswertproblem mit einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten mit Python/Sympy lösen können.

Aufgaben

6.1 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgende Aufgabe:
10 (Seite 530)

6.2 Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden GDGL:

a) $y'' - 2y' - 8y = 6\, e^{4x}$

b) $y'' + 10y' - 24y = 12x^2 + 14x + 1$

c) $y'' + y = -6\sin(2x)$

d) $y'' - 2y' + y = e^x + x$

e) $y'' + y = 2$

f) $y'' - 2y' - 3y = -2\, e^{3x}$

6.3 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden AWP:

GDGL: $y'' + 2y' + 3y = e^{-2x}$

AB: $y(0) = 0$
$y'(0) = 1$

6.4 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
11, 12 (Seiten 530 und 531)

6.5 Bestimmen Sie für einige Beispiele der Aufgabe 6.4 die allgemeine Lösung der gegebenen GDGL (Aufgabe 11) bzw. die (partikuläre) Lösung des angegebenen AWP (Aufgabe 12) mit Python/Sympy.

6.6 Führen Sie in Moodle den Test 6 durch.

*Nachtrag zu **homogenen** linearen GDGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*

6.7 Die homogene lineare GDGL 2. Grades $y'' + a\cdot y' + b\cdot y = 0$ mit konstanten Koeffizienten a und b soll für den Fall $a^2 - 4b < 0$ betrachtet werden.

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Die GDGL besitzt die folgenden beiden komplexen Basislösungen $\tilde{y}_1(x)$ und $\tilde{y}_2(x)$ (siehe Unterricht):

$\tilde{y}_1(x) = e^{\alpha x + i\omega x} = e^{\alpha x}\, e^{i\omega x}$ $\qquad$ $\tilde{y}_2(x) = e^{\alpha x - i\omega x} = e^{\alpha x}\, e^{-i\omega x}$

mit $\alpha := -\frac{a}{2}$ und $\omega := \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$

Aus der komplexen Lösung $\tilde{y}_1(x)$ können die beiden folgenden reellen Basislösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ gefunden werden (siehe Unterricht):

$y_1(x) = \mathrm{Im}\left(\tilde{y}_1(x)\right) = e^{\alpha x} \sin(\omega x)$ $\qquad$ $y_2(x) = \mathrm{Re}\left(\tilde{y}_1(x)\right) = e^{\alpha x} \cos(\omega x)$

Die allgemeine Lösung y(x) der GDGL lautet daher wie folgt:

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) = e^{\alpha x}\,(C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)) \qquad (1)$$

a) Zeigen Sie, dass y(x) auch in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$y(x) = A\, e^{\alpha x} \sin(\omega x + \varphi) \qquad (2)$$

Hinweise:
- Gehen Sie von (2) aus: Formen Sie (2) um, bis Sie (1) erhalten.
- Verwenden Sie ein Additionstheorem aus der Trigonometrie.

b) Bestimmen Sie, wie A und φ aus C_1 und C_2 berechnet werden können.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

3.4 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung (Seiten 407 bis 416)