Aufgaben 3 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung Separation der Variablen

Lernziele

- die allgemeine Lösung einer separierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen bestimmen können.
- ein Anfangswertproblem mit einer separierbaren gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen lösen können.
- das Anfangswertproblem für ein konkretes Torricelli-Problem formulieren und lösen können.
- die Stabilität einer statischen Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Hilfe des Richtungsvektorfeldes beurteilen können.
- das Richtungsvektorfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung mit Python/Numpy plotten können.
- mit Hilfe des Richtungsvektorfeldes beurteilen können, ob eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung elementar integrierbar ist.
- verstehen, inwiefern aus dem Richtungsvektorfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung beurteilt werden kann, ob die Differentialgleichung separierbar ist.

Aufgaben

3.1

Finden Sie jeweils die *allgemeine Lösung* der gegebenen ODE mit Hilfe der Methode der *Separation der Variablen.* Achten Sie darauf, dass Sie keine *Lösungen* übersehen.

a) $y' = 2y$ **c)** $y' = y^2$ **e)** $y' = 1 + y^2$

b) $y' = x\,y$ **d)** $y' = x^2y^3$ **f)** $y' = 3x^2y + x^2$

3.2

Lösen Sie jeweils das gegebene IVP mit Hilfe der Methode der *Separation der Variablen.*

a) $\begin{cases} \text{ODE:} & y' - xy^2 = x \\ \text{IC:} & y(0) = 1. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \text{ODE:} & y' - 2\sqrt{y} = 0 \\ \text{IC:} & y(2) = 9. \end{cases}$

Bem.:
- «IVP» bedeutet «**I**nitial **V**alue **P**roblem» (deutsch: Anfangswertproblem).
- «IC» bedeutet «**I**nitial **C**onditions» (deutsch: Anfangsbedingungen).

3.3 Bearbeiten Sie im Lehrbuch Papula 2 die folgenden Aufgaben:
4, 5 (Seiten 523 und 524, „Zu Abschnitt 2“)

3.4 Betrachten Sie das folgende AWP für die Fallgeschwindigkeit v = v(t) eines Felsbrockens (vgl. Unterricht in der ersten Semesterwoche):

GDGL: $\dot{v} = g - \frac{k}{m}v^2$
AB: $v(0\text{ s}) = 0\text{ m/s}$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der GDGL.

Hinweise:
- Die GDGL ist separierbar.
- Eines der auftretenden Integrale kann (bis auf einen konstanten Vorfaktor) auf die folgende Form gebracht werden:
$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx$ (Formelsammlung Papula, Integral (46), Seite 480)

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung für das ganze AWP.

Nehmen Sie für die nächsten Teilaufgaben die folgenden Zahlenwerte an:

$g = 9.81$ N/kg $m = 300$ kg $k = 0.80$ Ns^2/m^2

c) Plotten Sie das Richtungsvektorfeld der GDGL mit Python/Numpy.

d) Beurteilen Sie mit Hilfe des in b) geplotteten Richtungsvektorfeldes die Stabilität der statischen Lösung(en) der GDGL.

e) Plotten Sie die in b) bestimmte spezielle Lösung des AWP mit Python/Numpy.

3.5 Betrachten Sie einen mit Wasser gefüllten, oben offenen, aufrecht stehenden, zylindrischen Stahltank mit Radius 2.00 m und Höhe 7.00 m. Am unteren Ende des Tanks befindet sich ein offenes Ausflussrohr mit Radius 5.0 cm.

Der Wassertank wird entleert, wobei während der ganzen Zeit oben kein Wasser in den Tank hinein fliesst.

a) Formulieren Sie ein AWP für den Wasserstand $h(t)$ im Tank.

Hinweis:
- Gehen Sie von der im Unterricht hergeleiteten GDGL für das Torricelli-Problem aus.

b) Plotten Sie das Richtungsvektorfeld für die in a) formulierte GDGL mit Python/Numpy.

Hinweis:
- Bestimmen Sie zuerst die statische(n) Lösung(en) der GDGL.

c) Beurteilen Sie mit Hilfe des in b) geplotteten Richtungsvektorfeldes die Stabilität der statischen Lösung(en) der GDGL.

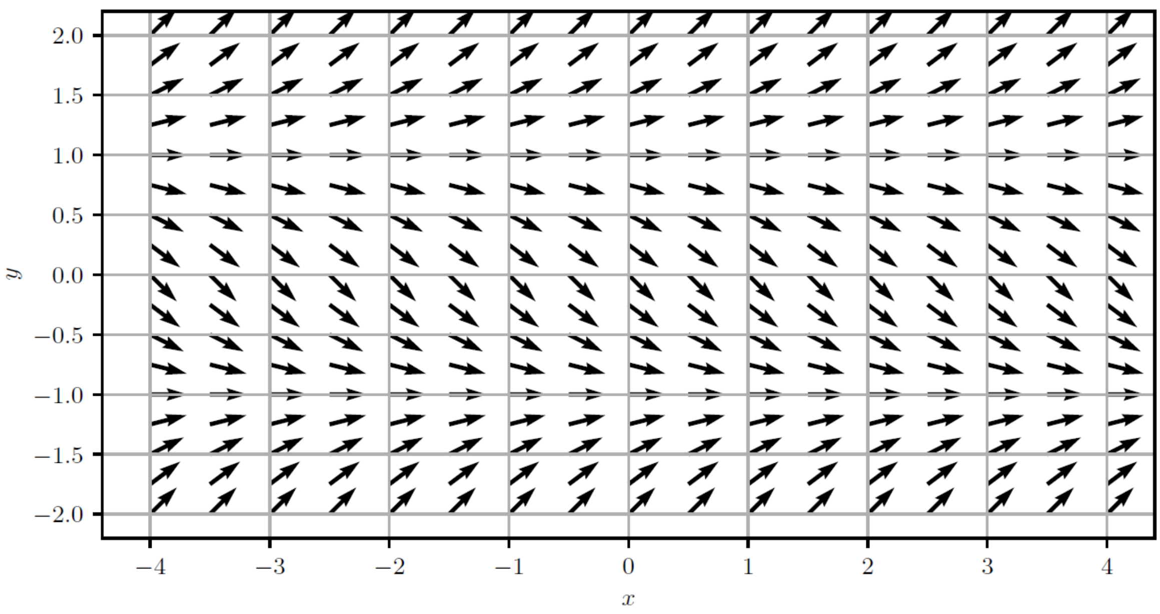
d) Bestimmen Sie die Lösung des in a) formulierten AWP.

Hinweis:
- Es stellt sich heraus, dass die gesuchte Lösung nicht für alle Zeitpunkte t definiert ist.

e) Plotten Sie die in d) bestimmte spezielle Lösung des AWP mit Python/Numpy.

f) Bestimmen Sie, wie lange es dauert, bis der Tank vollständig entleert ist.

3.6 Gegeben ist das folgende Richtungsvektorfeld einer GDGL 1. Ordnung:



(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

		wahr	falsch
a)	Das Richtungsvektorfeld visualisiert eine elementar integrierbare GDGL.	☐	☐
b)	Das Richtungsvektorfeld visualisiert eine separierbare GDGL.	☐	☐
c)	Die Lösung durch den Punkt (-20; 0.9) nähert sich für x immer mehr dem Wert -1 an.	☐	☐
d)	Die Funktion y(x) = 1 ist eine stabile statische Lösung.	☐	☐
e)	Bei jeder separierbaren GDGL kann man aus dem Richtungsvektorfeld einfach erkennen, dass die GDGL separierbar ist.	☐	☐

3.7 Führen Sie in Moodle den Test 3 durch.

Lehrbuch Papula 2

IV Gewöhnliche Differentialgleichungen

2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen (Seiten 358 bis 362)

Lösungen

3.1 …

3.2 …

3.3 (siehe Lehrbuch Papula 2, Seiten 747 und 748)

3.4 …

3.5 …

3.6 a) falsch
b) wahr
c) wahr
d) falsch
e) falsch

3.7 -