Übung 16 Trigonometrie
Sinus-Satz, Cosinus-Satz

Lernziele

- den Sinus- und den Cosinus-Satz kennen.
- die Herleitungen des Sinus- und des Cosinus-Satzes verstehen.
- den Zusammenhang zwischen dem Cosinus-Satz und dem Satz von Pythagoras verstehen.
- den Sinus- und den Cosinus-Satz bei Dreiecksberechnungen anwenden können.
- selbstständig einen neuen Sachverhalt bearbeiten können.
- in Gruppen Probleme diskutieren und lösen können, die sich beim selbstständigen Erarbeiten eines neuen Sachverhaltes ergeben haben.

Aufgaben

1. In einem beliebigen Dreieck gilt der **Sinus-Satz**.
Er drückt einen Zusammenhang aus zwischen zwei Seiten des Dreiecks und den ihnen gegenüberliegenden Winkeln:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

a) Studieren Sie im Geometrie-Skript auf der Seite 61 die Herleitung des Sinus-Satzes.

b) Geben Sie den Sinus-Satz an für
i) die Seiten b, c und die Winkel β, γ.
ii) die Seiten a, c und die Winkel α, γ.

2. In einem beliebigen Dreieck gilt der **Cosinus-Satz**.
Er drückt einen Zusammenhang aus zwischen den drei Seiten des Dreiecks und einem der drei Winkel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

a) Studieren Sie im Geometrie-Skript auf der Seite 61 die Herleitung des Cosinus-Satzes.

b) Geben Sie den Cosinus-Satz an für
i) die Seiten a, b, c und den Winkel α.
ii) die Seiten a, b, c und den Winkel β.

3. Am Ende des Absatzes über die Herleitung des Cosinus-Satzes steht:

"Der Cosinussatz ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras."

a) Man könnte diesen Zusammenhang zwischen dem Cosinus-Satz und dem Satz von Pythagoras auch umgekehrt formulieren:
"Der Satz von Pythagoras ist ... des Cosinus-Satzes."
Ergänzen Sie die fehlenden Wörter.

b) Erklären Sie den genannten Zusammenhang zwischen dem Cosinus-Satz und dem Satz von Pythagoras in zwei bis drei Sätzen.
Eine KollegIn aus Ihrer Klasse, die sich diesen Zusammenhang noch nie überlegt hat, sollte anhand Ihrer Erklärung verstehen, dass der Cosinus-Satz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras ist.

4. Bearbeiten Sie vom Blatt "Aufgaben 23" die Aufgaben 3 bis 9.

Stellen Sie bei jeder Augabe zuerst ein vollständiges Gleichungssystem auf, welches die gesuchte(n) Grösse(n) als Unbekannte enthält.
Lösen Sie erst dann das Gleichungssystem auf.

Lösungen

1. a) ...

   b) i) $\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

   ii) $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$

2. a) ...

   b) i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$

   ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$

3. a) "Der Satz von Pythagoras ist **ein Spezialfall** des Cosinus-Satzes."

   b) In einem beliebigen Dreieck gilt wegen des Cosinus-Satzes

   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

   Für den Spezialfall eines rechtwinkligen Dreiecks folgt daraus wegen $\gamma = 90°$ und $\cos(90°) = 0$

   $$c^2 = a^2 + b^2$$

   Dies ist gerade der Satz von Pythagoras.
   Der Satz von Pythagoras ist also ein Spezialfall des Cosinus-Satzes.

4. Schlussresultate (nach dem Auflösen des Gleichungssystems) siehe Aufgabenblatt