Übung 15 — Trigonometrie
Trigonometrische Grundfunktionen

Lernziele

- verstehen, wie die trigonometrischen Grundfunktionen definiert sind.
- Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen aus deren Definition am Einheitskreis herleiten können.

Aufgaben

1. Betrachten Sie die Darstellung bzw. Definition der Sinus- und der Cosinus-Funktion am Einheitskreis (Geometrie-Skript Seite 57 oben).

   a) Bestimmen Sie alle Winkel ϕ R, für welche gilt:
      - i) $\sin(\phi) = 0$
      - ii) $\sin(\phi) = 1$
      - iii) $\sin(\phi) = -1$
      - iv) $\cos(\phi) = 0$
      - v) $\cos(\phi) = 1$
      - vi) $\cos(\phi) = -1$
      - vii) $\sin(\phi) = \cos(\phi)$
      - viii) $\sin(\phi) = -\cos(\phi)$

   b) Begründen Sie, dass für alle Winkel ϕ R gilt:
      - i) $\sin(-\phi) = -\sin(\phi)$
      - ii) $\cos(-\phi) = \cos(\phi)$
      - iii) $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$

      Bem.: $\sin^2(\phi)$ bedeutet $(\sin(\phi))^2$, und nicht etwa $\sin(\sin(\phi))$.
      $\cos^2(\phi)$ analog

2. Im Unterricht wurde erklärt, wie man den Grafen der Sinus-Funktion

   $$f:\quad \begin{array}{lcl} R & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & y = f(x) = \sin(x) \end{array}$$

   aus der Darstellung am Einheitskreis gewinnt (vgl. Geometrie-Skript Seite 59 oben).

   Versuchen Sie, mit der gleichen Methode den Grafen der Cosinus-Funktion zu gewinnen.

3. Betrachten Sie die Tangens-Funktion (vgl. Geometrie-Skript Seite 59):

   $$f:\quad \begin{array}{lcl} R\backslash\{90°+k\cdot 180°,\ k\ \ Z\} & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & y = f(x) = \tan(x) \end{array}$$

   a) Begründen Sie, warum der Graf der Tangens-Funktion im Intervall [0°,90°[ansteigt.

   Die Tangens-Funktion hat Definitionslücken, d.h. sie ist nicht für alle x R definiert.
   Die Winkel $x = 90°+k\cdot 180°$ (k Z), d.h. x = ... , -90°, 90°, 270°, ... gehören nicht zum Definitionsbereich.

   b) Begründen Sie, warum die Tangens-Funktion für diese Winkel nicht definiert ist.

   c) Betrachten Sie die Definitionslücke bei x = 90°.
      Erklären Sie, warum der Tangens-Wert von x, d.h. tan(x)
      - i) gegen $+\infty$ strebt, wenn sich x von links her dem Wert 90° nähert.
      - ii) gegen $-\infty$ strebt, wenn sich x von rechts her dem Wert 90° nähert.

Lösungen

1. a)
   i) $\phi = k\cdot180°$, k Z (... , -540°, -360°, -180°, 0°, 180°, 360°, 540°, ...)
   ii) $\phi = 90°+k\cdot360°$, k Z (... , -270°, 90°, 450°, ...)
   iii) $\phi = 270°+k\cdot360°$, k Z (... , -90°, 270°, 630°, ...)
   iv) $\phi = 90°+k\cdot180°$, k Z (... , -450°, -270°, - 90°, 90°, 270°, 450°, ...)
   v) $\phi = k\cdot360°$, k Z (... , -720°, -360°, 0°, 360°, 720°, ...)
   vi) $\phi = 180°+k\cdot360°$, k Z (... , -540°, -180°, 180°, 540°, ...)
   vii) $\phi = 45°+k\cdot180°$, k Z (... , -315°, -135°, 45°, 225°, 405°, ...)
   viii) $\phi = 135°+k\cdot180°$, k Z (... , -225°, -45°, 135°, 315°, 495°, ...)

   b)
   i) ...
   ii) ...
   iii) (Satz von Pythagoras)

2. ...

3. a) $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

   Im Intervall [0°,90°[wird sin(x) grösser und cos(x) kleiner, d.h. tan(x) wird grösser.

   b) $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

   ist für alle Winkel x, für welche cos(x) = 0 gilt, nicht definiert (Division durch Null!).
   Gemäss Aufgabe 1 a) iv) ist dies der Fall für die genannten Winkel x = ... , -90°, 90°, 270°, ...

   c)
   i) ...
   ii) ...