# Übung 13 Kreisberechnungen Quadratur des Kreises

### Lernziel

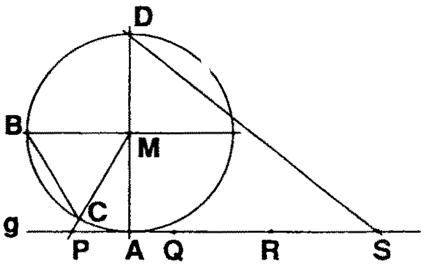
- einen neuen Sachverhalt mit Hilfe bekannter geometrischer Sätze und Beziehungen analysieren können.

### Aufgabe

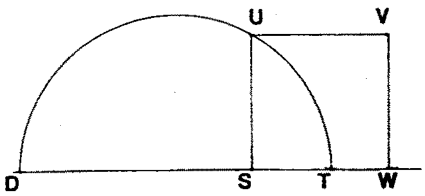
Vor einigen Jahren ist im "Tages-Anzeiger" der folgende Artikel erschienen, in welchem eine Methode für eine **näherungsweise Quadratur des Kreises** beschrieben wird:

**Do it yourself**

Die Verwandlung eines Kreises in ein flächengleiches Quadrat mittels Zirkel und Lineal ist im streng mathematischen Sinne nicht durchführbar. Vom rein praktischen Standpunkt aus ist dies aber durchaus möglich. Eine besonders einfache und dennoch verblüffend genaue Methode geht auf Adam Kochanski (1685) zurück. Sie lässt sich wie folgt realisieren:




1. Fadenkreuz durch das Zentrum M des Kreises legen und Berührungsgerade g durch A ziehen.
2. Von B aus den Kreisradius nach C abtragen.
3. Schnittpunkt P der Strahles von M nach C mit g konstruieren.
4. Von P aus auf g über Q und R nach S dreimal den Radius abtragen.
5. Die Strecke von D nach S um den Radius nach T verlängern (der Übersichtlichkeit halber in einer neuen Skizze dargestellt).




6. Halbkreis über die Strecke von D nach T schlagen.
7. Schnittpunkt U der Senkrechten durch S mit dem Halbkreis markieren.

Ergebnis: Das Quadrat über der Strecke von S nach U (Eckenbezeichnungen: S, U, V, W) hat «praktisch» die gleiche Fläche wie der ursprüngliche Kreis. So beträgt die Abweichung bis zu einem Radius von 13 cm weniger als 1 mm². Allgemein ist die Fehlerquote kleiner als 0,002%.

Überprüfen Sie die Aussage am Schluss des Artikels, wonach die **Fehlerquote kleiner als 0.002%** sei:

a) Studieren Sie die Konstruktion der Quadratseite SU.

b) Drücken Sie die Länge der Quadratseite SU durch den Radius r des ursprünglichen Kreises aus.
Vorgehen:
- Stellen Sie zuerst ein Gleichungssystem auf, in welchem die Länge der Quadratseite SU als Unbekannte und der Radius des Kreises als Bekannte vorkommt.
- Lösen Sie dann das Gleichungssystem auf.

c) Vergleichen Sie die Fläche des Quadrates SUVW mit der Fläche des ursprünglichen Kreises. Bilden Sie das Verhältnis zwischen den beiden Flächen, und überprüfen Sie, ob die Fehlerquote tatsächlich kleiner als 0.002% ist.

**Lösungen**

a) ...

b) $\overline{SU} = \left(\sqrt[4]{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}\right) \cdot r$

c) $A_{Quadrat} = \left(\overline{SU}\right)^2 = \left(\left(\sqrt[4]{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}\right) \cdot r\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}\right) \cdot r^2$

$A_{Kreis} = r^2\pi$

$$\frac{A_{Quadrat}}{A_{Kreis}} = \frac{\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}}{\pi} = 0.999981...$$

$A_{Quadrat} = 99.9981...\% \cdot A_{Kreis} > 99.998\% \cdot A_{Kreis}$

Fehlerquote $< 0.002\%$