Übung 2 Vektoren
Komponenten, Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar

Lernziele

- die Komponenten eines Vektors aus den Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt eines den Vektor repräsentierenden Pfeils bestimmen können.
- den Unterschied zwischen einem Vektor und einem Pfeil verstehen.
- zwei Vektoren komponentenfrei addieren, subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren können.
- Vektoren, die durch ihre Komponenten gegeben sind, addieren, subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren können.
- wissen, was ein Gegenvektor und was ein Nullvektor ist.
- aus dem Studium von schriftlichen Unterlagen selbstständig neues Wissen erarbeiten können.
- neue Sachverhalte analysieren können.

Aufgaben

Komponenten

1. Gegeben sind zwei Punkte P und Q.
   i) Zeichnen Sie die beiden Punkte P und Q sowie den Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ in einem kartesischen Koordinatensystem ein.
   ii) Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{PQ}$.

   a) P(3|1) Q(4|5)
   b) P(-2|5) Q(1|-1|)
   c) P(3|-1|0) Q(0|-1|3)
   d) P(-1|2|3) Q(4|-5|6)

2. Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
   "Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist ein Pfeil, der im Punkt P beginnt und im Punkt Q endet."

Addition

3. Zeichnen Sie drei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf ein Blatt. Die drei Vektoren sollen verschiedene Richtungen und verschiedene Längen aufweisen.
   Bestimmen Sie zeichnerisch die folgenden Vektoren:
   a) $\vec{a} + \vec{b}$
   b) $\vec{c} + \vec{a}$
   c) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$

4. Gegeben sind die drei folgenden Vektoren:
   $$\vec{p} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie die Komponenten der folgenden Vektoren:
   a) $\vec{p} + \vec{q}$
   b) $\vec{r} + \vec{q}$
   c) $\vec{q} + \vec{r} + \vec{p}$

Subtraktion

5. Studieren Sie im Geometrie-Skript auf den Seiten 15 und 16 die Abschnitte *Der Gegenvektor*, *Der Nullvektor* und *Subtraktion*.

6. Sie kennen bereits die Vorschrift, wie man grafisch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **addiert** (vgl. Geometrie-Skript Seite 15):
   - Man setzt $\vec{b}$ mit seinem Anfangspunkt an der Spitze von $\vec{a}$ an.
   - Der Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ wird vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ gezogen.
   Formulieren Sie nun eine entsprechende Vorschrift dafür, wie man grafisch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **subtrahiert**.

7. Zeichnen Sie drei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf ein Blatt. Die drei Vektoren sollen verschiedene Richtungen und verschiedene Längen aufweisen.
Bestimmen Sie zeichnerisch die folgenden Vektoren:
a) $\vec{a} - \vec{b}$
b) $\vec{c} - \vec{a}$
c) $\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$

8. Im Geometrie-Skript steht auf der Seite 16 im Abschnitt *Subtraktion*, wie man zwei Vektoren subtrahiert, welche mit Komponenten gegeben sind:
"Vektoren, welche mit Komponenten gegeben sind, werden subtrahiert, indem man ihre Komponenten subtrahiert."

a) Diese Vorschrift lautet also wie folgt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die fehlenden Grössen, d.h. geben Sie die Komponenten des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$ an.

b) Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$.

Multiplikation mit einem Skalar

9. Studieren Sie im Geometrie-Skript auf der Seite 16 den Abschnitt *Multiplikation mit einem Skalar*.

10. Im Geometrie-Skript steht auf der Seite 16, wie man einen Vektor, welcher mit Komponenten gegeben ist, mit einer reellen Zahl multipliziert:
"In einem Koordinatensystem kann man einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren, indem man seine Komponenten mit dem Skalar multipliziert."

a) Diese Vorschrift lautet also wie folgt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Ergänzen Sie die fehlenden Grössen, d.h. geben Sie die Komponenten des Vektors $k \cdot \vec{a}$ an.

b) Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$ und der Skalar k:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, k = -3$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $k \cdot \vec{a}$.

11. Im Geometrie-Skript stehen auf der Seite 16 die folgenden Rechenregeln:

i) $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}$
ii) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$
iii) $(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$

a) Veranschaulichen Sie sich die drei Rechenregeln, indem Sie für k_1 und k_2 konkrete Zahlen einsetzen.

b) Drücken Sie die drei Rechenregeln in Worten aus.
Versuchen Sie also, die durch die drei Formeln ausgedrückten Sachverhalte je in Form eines deutschen Satzes wiederzugeben.

c) * Beweisen Sie die drei Rechenregeln.
Vergleichen Sie dazu jeweils die Komponenten des Vektors auf der linken Seite des Gleichheitszeichens mit den Komponenten des Vektors auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens.

Lösungen

1. a) i) ...

   ii) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   b) i) ...

   ii) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

   c) i) ...

   ii) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ -1-(-1) \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

   d) i) ...

   ii) $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 4-(-1) \\ -5-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. falsch.

   Der Vektor $\vec{PQ}$ ist die Menge aller Pfeile, die die gleiche Länge und die gleiche Richtung haben wie der Pfeil, der im Punkt P beginnt und im Punkt Q endet.

3. a) ...
   b) ...
   c) ...

4. a) $\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+1 \\ 3+5 \\ -12+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -18 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{r} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+1 \\ 5+5 \\ 0+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$

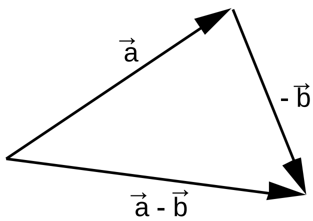
   c) $\vec{q} + \vec{r} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-6)+(-6) \\ 5+5+3 \\ -6+0+(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -18 \end{pmatrix}$

5. ...

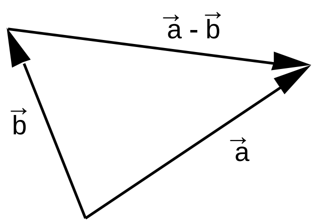
6. Variante 1:
   - Man setzt den Gegenvektor $-\vec{b}$ mit seinem Anfangspunkt an der Spitze von $\vec{a}$ an.
   - Der Differenzvektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wird vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $-\vec{b}$ gezogen.

   Variante 2:
   - Man zeichnet $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen.
   - Der Differenzvektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wird vom Endpunkt von $\vec{b}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$ gezogen.

   zu Variante 1:



   zu Variante 2:



7. a) ...
   b) ...
   c) ...

8. a) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \dots \\ a_n-b_n \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

9. ...

10. a) $k\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} k\cdot a_1 \\ k\cdot a_2 \\ \dots \\ k\cdot a_n \end{pmatrix}$ b) $k\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$

11. a) i) $2\cdot(3\cdot\vec{a}) = 6\cdot\vec{a}$, $4\cdot((-2)\cdot\vec{a}) = -8\cdot\vec{a}$, ...

ii) $4\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 4\cdot\vec{a} + 4\cdot\vec{b}$, $(-2)\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = (-2)\cdot\vec{a} + (-2)\cdot\vec{b}$, ...

iii) $(5+6)\cdot\vec{a} = 5\cdot\vec{a} + 6\cdot\vec{a}$, $(3-5)\cdot\vec{a} = 3\cdot\vec{a} - 5\cdot\vec{a}$, ...

b) i) Wird ein Vektor nacheinander mit zwei Zahlen multipliziert, so darf man zuerst die beiden Zahlen multiplizieren und dann das Produkt der beiden Zahlen mit dem Vektor multiplizieren.
oder
Das Produkt einer Zahl mit dem Produkt einer anderen Zahl und einem Vektor ist gleich dem Produkt des Produktes der beiden Zahlen mit dem Vektor.

ii) Ein Produkt einer Zahl mit der Summe zweier Vektoren darf man ausmultiplizieren.
oder
Das Produkt einer Zahl mit der Summe zweier Vektoren ist gleich der Summe der Produkte der Zahl mit den einzelnen Vektoren.

iii) Das Produkt der Summe zweier Zahlen mit einem Vektor darf man ausmultiplizieren.
oder
Das Produkt einer Summe zweier Zahlen mit einem Vektor ist gleich der Summe der Produkte der einzelnen Zahlen mit dem Vektor.

c) * i) $k_1\cdot(k_2\cdot\vec{a}) = k_1\cdot\begin{pmatrix} k_2\cdot a_1 \\ k_2\cdot a_2 \\ \dots \\ k_2\cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\cdot(k_2\cdot a_1) \\ k_1\cdot(k_2\cdot a_2) \\ \dots \\ k_1\cdot(k_2\cdot a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1\cdot k_2)\cdot a_1 \\ (k_1\cdot k_2)\cdot a_2 \\ \dots \\ (k_1\cdot k_2)\cdot a_n \end{pmatrix} = (k_1\cdot k_2)\cdot\vec{a}$

ii) $k\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = k\cdot\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \dots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot(a_1+b_1) \\ k\cdot(a_2+b_2) \\ \dots \\ k\cdot(a_n+b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a_1+k\cdot b_1 \\ k\cdot a_2+k\cdot b_2 \\ \dots \\ k\cdot a_n+k\cdot b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a_1 \\ k\cdot a_2 \\ \dots \\ k\cdot a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cdot b_1 \\ k\cdot b_2 \\ \dots \\ k\cdot b_n \end{pmatrix}$

$= k\cdot\vec{a} + k\cdot\vec{b}$

iii) $(k_1+k_2)\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} (k_1+k_2)\cdot a_1 \\ (k_1+k_2)\cdot a_2 \\ \dots \\ (k_1+k_2)\cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\cdot a_1+k_2\cdot a_1 \\ k_1\cdot a_2+k_2\cdot a_2 \\ \dots \\ k_1\cdot a_n+k_2\cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\cdot a_1 \\ k_1\cdot a_2 \\ \dots \\ k_1\cdot a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2\cdot a_1 \\ k_2\cdot a_2 \\ \dots \\ k_2\cdot a_n \end{pmatrix} = k_1\cdot\vec{a} + k_2\cdot\vec{a}$