Übung 17 — Vektoren Skalarprodukt

Lernziele

- neue Sachverhalte erarbeiten können.
- die Rechengesetze des Skalarproduktes kennen und verstehen.

Aufgaben

1. Im Unterricht wurde gezeigt, dass der Projektionsvektor $\vec{b}_a$, den man durch Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ erhält, gegeben ist durch

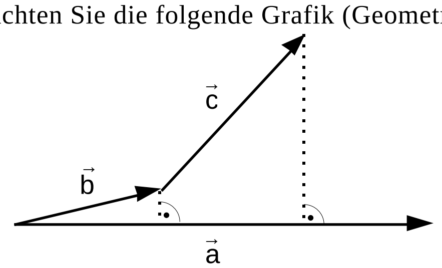
$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\,\vec{a}$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung, dass die folgende Aussage richtig ist:
"Der Betrag des Skalarproduktes eines Vektors $\vec{x}$ mit dem Einheitsvektor $\vec{e}$ ist gleich dem Betrag des Projektionsvektors $\vec{x}_e$."

2. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt das **Distributivgesetz** erfüllt:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

Vorgehen:
- Betrachten Sie die folgende Grafik (Geometrie-Skript, Seite 67):



- Überlegen Sie sich anhand der Grafik, dass gilt $(\vec{b} + \vec{c})_a = \vec{b}_a + \vec{c}_a$
- Drücken Sie die drei Projektionsvektoren $(\vec{b} + \vec{c})_a$, $\vec{b}_a$ und $\vec{c}_a$ durch die Formel in der Aufgabe 1 aus.
- Formen Sie die erhaltene Gleichung um, bis Sie die Beziehung $\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ erhalten.

3. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt die folgende **Rechenregel** erfüllt:

$$k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (k\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\cdot\vec{b}) \qquad (k \quad R)$$

Vorgehen:
- Beweisen Sie das Rechengesetz zuerst für k=2.
- Überlegen Sie sich dann, dass das Rechengesetz für ein beliebiges k>0 gelten muss.
- Überlegen Sie sich schliesslich, dass das Rechengesetz auch für alle k<0 gilt.

4. Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt die folgende **Rechenregel** erfüllt:

$$(k+\lambda)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) = k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (k,\lambda \quad R)$$

Vorgehen:
- Beweisen Sie das Rechengesetz zuerst für k=2 und λ=3.
- Überlegen Sie sich dann, dass das Rechengesetz für beliebige k und λ gelten muss.

Lösungen

1. $\vec{x}_e = \frac{\vec{x} \cdot \vec{e}}{|\vec{e}|^2} \cdot \vec{e} = (\vec{x} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e}$

   $\left|\vec{x}_e\right| = \left|(\vec{x} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e}\right| = |\vec{x} \cdot \vec{e}| \cdot |\vec{e}| = |\vec{x} \cdot \vec{e}|$

2. ...

3. ...

4. ...