

Übung 15 Trigonometrie Trigonometrische Grundfunktionen

Lernziele

- verstehen, wie die trigonometrischen Grundfunktionen definiert sind.
- Eigenschaften der trigonometrischen Grundfunktionen aus deren Definition am Einheitskreis herleiten können.

Aufgaben

1. Betrachten Sie die Darstellung bzw. Definition der Sinus- und der Cosinus-Funktion am Einheitskreis (Geometrie-Skript Seite 57 oben).

a) Bestimmen Sie alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche gilt:

- i) $\sin(\alpha) = 0$
- ii) $\sin(\alpha) = 1$
- iii) $\sin(\alpha) = -1$
- iv) $\cos(\alpha) = 0$
- v) $\cos(\alpha) = 1$
- vi) $\cos(\alpha) = -1$
- vii) $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$
- viii) $\sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$

b) Begründen Sie, dass für alle Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

- i) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- ii) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- iii) $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
Bem.: Mit $\sin^2(\alpha)$ bzw. $\cos^2(\alpha)$ ist $(\sin(\alpha))^2$ bzw. $(\cos(\alpha))^2$ gemeint.

2. Im Unterricht wurde erklärt, wie man den Grafen der Sinus-Funktion

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ x \end{array} \rightarrow \mathbb{R} \quad y = f(x) = \sin(x)$$

aus der Darstellung am Einheitskreis gewinnt (vgl. Geometrie-Skript Seite 59 oben).

Versuchen Sie, mit der gleichen Methode den Grafen der Cosinus-Funktion zu gewinnen.

3. Betrachten Sie die Tangens-Funktion (vgl. Geometrie-Skript Seite 59):

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \setminus \{90^\circ + k \cdot 180^\circ\} \\ x \end{array} \rightarrow \mathbb{R} \quad y = f(x) = \tan(x)$$

a) Begründen Sie, warum der Graf der Tangens-Funktion im Intervall $[0^\circ, 90^\circ[$ ansteigt.

Die Tangens-Funktion hat Definitionslücken, d.h. sie ist nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Die Winkel $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$), d.h. $x = \dots, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, \dots$ gehören nicht zum Definitionsbereich.

b) Begründen Sie, warum die Tangens-Funktion für diese Winkel nicht definiert ist.

c) Betrachten Sie die Definitionslücke bei $x = 90^\circ$.

Erklären Sie, warum der Tangens-Wert von x , d.h. $\tan(x)$

- i) gegen $+\infty$ strebt, wenn sich x von links her dem Wert 90° nähert.
- ii) gegen $-\infty$ strebt, wenn sich x von rechts her dem Wert 90° nähert.

Lösungen

1. a) i) $= k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -540^\circ, -360^\circ, -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \dots$)
ii) $= 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -270^\circ, 90^\circ, 450^\circ, \dots$)
iii) $= 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -90^\circ, 270^\circ, 630^\circ, \dots$)
iv) $= 90^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -450^\circ, -270^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, \dots$)
v) $= k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -720^\circ, -360^\circ, 0^\circ, 360^\circ, 720^\circ, \dots$)
vi) $= 180^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -540^\circ, -180^\circ, 180^\circ, 540^\circ, \dots$)
vii) $= 45^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -315^\circ, -135^\circ, 45^\circ, 225^\circ, 405^\circ, \dots$)
viii) $= 135^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ ($\dots, -225^\circ, -45^\circ, 135^\circ, 315^\circ, 495^\circ, \dots$)
- b) i) ...
ii) ...
iii) (Satz von Pythagoras)

2. ...

3. a) $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
Im Intervall $[0^\circ, 90^\circ[$ wird $\sin(x)$ grösser und $\cos(x)$ kleiner, d.h. $\tan(x)$ wird grösser.
- b) $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
ist nicht definiert für alle Winkel x , für welche $\cos(x) = 0$ gilt (Division durch Null!).
Gemäss Aufgabe 1 a) iv) ist dies der Fall für die genannten Winkel $x = \dots, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, \dots$
- c) i) ...
ii) ...