Übung 2 — Vektoren
Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar

Lernziele

- wissen, was ein Gegenvektor und was ein Nullvektor ist.
- wissen, wie man zwei Vektoren subtrahiert.
- wissen, wie man einen Vektor mit einer reellen Zahl multipliziert.
- aus dem Studium von schriftlichen Unterlagen selbstständig neues Wissen erarbeiten können.
- Sachverhalte, die für Sie neu sind, analysieren können.

Aufgaben

Subtraktion

1. Studieren Sie im Geometrie-Skript auf den Seiten 15 und 16 die Abschnitte *Der Gegenvektor*, *Der Nullvektor* und *Subtraktion*.

2. Sie kennen bereits die Vorschrift, wie man grafisch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **addiert** (vgl. Geometrie-Skript Seite 15):
   - Man setzt $\vec{b}$ mit seinem Anfangspunkt an der Spitze von $\vec{a}$ an.
   - Der Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ wird vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$ gezogen.

   Formulieren Sie nun eine entsprechende Vorschrift dafür, wie man grafisch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **subtrahiert**.

3. Im Geometrie-Skript steht auf der Seite 16 im Abschnitt *Subtraktion*, wie man zwei Vektoren subtrahiert, welche mit Komponenten gegeben sind:
   "Vektoren, welche mit Komponenten gegeben sind, werden subtrahiert, indem man ihre Komponenten subtrahiert."

   a) Diese Vorschrift lautet also wie folgt:

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \dots \\ \\ \dots \end{pmatrix}$$

   Ergänzen Sie die fehlenden Grössen, d.h. geben Sie die Komponenten des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$ an.

   b) Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{a} - \vec{b}$.

Multiplikation mit einem Skalar

4. Studieren Sie im Geometrie-Skript auf der Seite 16 den Abschnitt *Multiplikation mit einem Skalar*.

5. Im Geometrie-Skript steht auf der Seite 16, wie man einen Vektor, welcher mit Komponenten gegeben ist, mit einer reellen Zahl multipliziert:
   "In einem Koordinatensystem kann man einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren, indem man seine Komponenten mit dem Skalar multipliziert."

   a) Diese Vorschrift lautet also wie folgt:

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \dots \\ \\ \dots \end{pmatrix}$$

   Ergänzen Sie die fehlenden Grössen, d.h. geben Sie die Komponenten des Vektors $k \cdot \vec{a}$ an.

b) Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$ und der Skalar k:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad k = -3$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $k \cdot \vec{a}$.

6. Im Geometrie-Skript stehen auf der Seite 16 die folgenden Rechenregeln:

i) $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}$

ii) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$

iii) $(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$

a) Veranschaulichen Sie sich die drei Rechenregeln, indem Sie für k_1 und k_2 konkrete Zahlen einsetzen.

b) Drücken Sie die drei Rechenregeln in Worten aus.
Versuchen Sie also, die durch die drei Formeln ausgedrückten Sachverhalte je in Form eines deutschen Satzes wiederzugeben.

c) * Beweisen Sie die drei Rechenregeln.
Vergleichen Sie dazu jeweils die Komponenten des Vektors auf der linken Seite des Gleichheitszeichens mit den Komponenten des Vektors auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens.

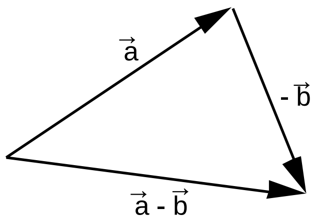
Lösungen

1. …

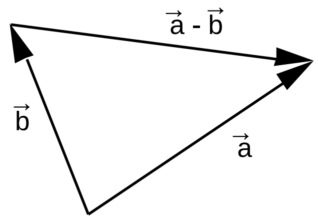
2. Variante 1:
- Man setzt den Gegenvektor $-\vec{b}$ mit seinem Anfangspunkt an der Spitze von $\vec{a}$ an.
- Der Differenzvektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wird vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $-\vec{b}$ gezogen.

Variante 2:
- Man zeichnet $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen.
- Der Differenzvektor $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ wird vom Endpunkt von $\vec{b}$ zum Endpunkt von $\vec{a}$ gezogen.

zu Variante 1:



zu Variante 2:



3. a) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \dots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. …

5. a) $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \dots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$ b) $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$

6. a) i) $2 \cdot (3 \cdot \vec{a}) = 6 \cdot \vec{a}$, $4 \cdot ((-2) \cdot \vec{a}) = -8 \cdot \vec{a}$, …
ii) $4 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 4 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b}$, $(-2) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-2) \cdot \vec{a} + (-2) \cdot \vec{b}$, …
iii) $(5 + 6) \cdot \vec{a} = 5 \cdot \vec{a} + 6 \cdot \vec{a}$, $(3 - 5) \cdot \vec{a} = 3 \cdot \vec{a} - 5 \cdot \vec{a}$, …

b) i) Wird ein Vektor nacheinander mit zwei Zahlen multipliziert, so darf man zuerst die beiden Zahlen multiplizieren und dann das Produkt der beiden Zahlen mit dem Vektor multiplizieren.
oder
Das Produkt einer Zahl mit dem Produkt einer anderen Zahl und einem Vektor ist gleich dem Produkt des Produktes der beiden Zahlen mit dem Vektor.
ii) Ein Produkt einer Zahl mit der Summe zweier Vektoren darf man ausmultiplizieren.
oder
Das Produkt einer Zahl mit der Summe zweier Vektoren ist gleich der Summe der Produkte der Zahl mit den einzelnen Vektoren.
iii) Das Produkt der Summe zweier Zahlen mit einem Vektor darf man ausmultiplizieren.
oder
Das Produkt einer Summe zweier Zahlen mit einem Vektor ist gleich der Summe der Produkte der einzelnen Zahlen mit dem Vektor.

c) * i) $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}) = k_1 \cdot \begin{pmatrix} k_2 \cdot a_1 \\ k_2 \cdot a_2 \\ \dots \\ k_2 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot (k_2 \cdot a_1) \\ k_1 \cdot (k_2 \cdot a_2) \\ \dots \\ k_1 \cdot (k_2 \cdot a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 \cdot k_2) \cdot a_1 \\ (k_1 \cdot k_2) \cdot a_2 \\ \dots \\ (k_1 \cdot k_2) \cdot a_n \end{pmatrix} = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}$

ii) $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot (a_1 + b_1) \\ k \cdot (a_2 + b_2) \\ \dots \\ k \cdot (a_n + b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 + k \cdot b_1 \\ k \cdot a_2 + k \cdot b_2 \\ \dots \\ k \cdot a_n + k \cdot b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \dots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cdot b_1 \\ k \cdot b_2 \\ \dots \\ k \cdot b_n \end{pmatrix} = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$

iii) $(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) \cdot a_1 \\ (k_1 + k_2) \cdot a_2 \\ \dots \\ (k_1 + k_2) \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_1 \\ k_1 \cdot a_2 + k_2 \cdot a_2 \\ \dots \\ k_1 \cdot a_n + k_2 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \cdot a_1 \\ k_1 \cdot a_2 \\ \dots \\ k_1 \cdot a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2 \cdot a_1 \\ k_2 \cdot a_2 \\ \dots \\ k_2 \cdot a_n \end{pmatrix} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$