Übung 11 Fourier-Transformation
Fourier-Koeffizienten als Abtastwerte der FT einer Grundperiode

Lernziele

- verstehen, dass die Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion Abtastwerte der Fourier-Transformierten einer Grundperiode der Funktion sind.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.

Aufgabe

Im Unterricht wurde die folgende Aussage bewiesen:

Die Fourier-Koeffizienten c_k einer periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ mit der Grundperiode T_0 können aus Abtastwerten der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ einer aperiodischen Funktion $x(t)$ gewonnen werden, welche über ein **beliebiges** Intervall der Länge T_0 gleich der periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ und ausserhalb dieses Intervalles gleich Null ist:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

Prüfen Sie diese Aussage nach, indem Sie für die untenstehenden Beispiele a) und b) die folgenden Teilaufgaben bearbeiten:

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $\tilde{x}(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.

ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k $(k \in \mathbb{Z})$ der Funktion $\tilde{x}(t)$ aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k $(k \in \mathbb{N})$, b_k $(k \in \mathbb{N})$ oder direkt aus $\tilde{x}(t)$.

iii) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

iv) Prüfen Sie nach, dass gilt:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_1(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} X_2(k\omega_0)$$

a)
$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| < \frac{T_0}{4}\right) \\ 0 & \left(\frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2}\right) \end{cases} \quad , \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & \left(-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}\right) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0<t<T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

Hinweise:
- Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $\tilde{x}(t)$ haben Sie bereits in der Übung 8 bestimmt.
- Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ haben Sie bereits in der Übung 10 bestimmt.

b) *
$$\tilde{x}(t) = \frac{\hat{x}}{T_0}\, t \quad (0<t<T_0) \quad , \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0<t<T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & \left(-\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}\right) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

Lösungen

a) i) ...

ii)
$$c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (k=0) \\ \dfrac{1}{k\pi} & (k = \ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots) \\ -\dfrac{1}{k\pi} & (k = \ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

iii)
$$X_1(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sin\left(\omega \dfrac{T_0}{4}\right)}{\omega} & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{T_0}{2} & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega T_0/4} + e^{-j\omega T_0}\left(e^{j\omega T_0/4} - 1\right)\right) & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{T_0}{2} & (\omega = 0) \end{cases}$$

iv) ...

b) * i) ...

ii)
$$c_k = \begin{cases} j\,\dfrac{\hat{x}}{2k\pi} & (k \neq 0) \\ \dfrac{\hat{x}}{2} & (k=0) \end{cases}$$

iii)
$$X_1(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\hat{x}}{T_0\omega^2}\left(e^{-j\omega T_0}\,(1+j\omega T_0) - 1\right) & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{\hat{x}}{2}\,T_0 & (\omega = 0) \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\hat{x}}{T_0\omega^2}\left(e^{-j\omega T_0/2}\left(j\omega\dfrac{T_0}{2} + 1\right) - e^{j\omega T_0/2}\left(-j\omega\dfrac{T_0}{2} + 1\right)\right) \\ \quad + j\,\dfrac{\hat{x}}{\omega}\left(1 - e^{j\omega T_0/2}\right) & (\omega \neq 0) \\ \dfrac{\hat{x}}{2}\,T_0 & (\omega = 0) \end{cases}$$

iv) ...