

Übung 8 Komplexe Fourier-Reihe Komplexe Fourier-Koeffizienten, Symmetrie

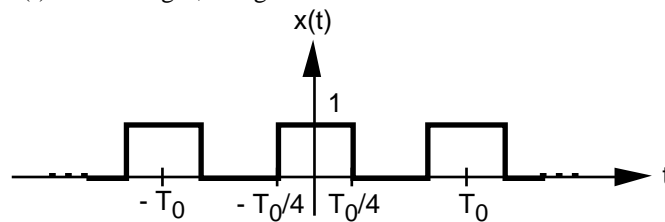
Lernziele

- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion in die komplexe Fourier-Reihe umformen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die grundlegenden Symmetrieeigenschaften der komplexen Fourier-Koeffizienten einer reellen periodischen Funktion kennen und verstehen.

Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$ und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).
 - i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).
 - ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) direkt aus der Funktion $x(t)$.
 - iii) Schreiben Sie ein paar Glieder der komplexen Fourier-Reihe auf.

- a) $x(t)$ aus Übung 5, Aufgabe 1:



$$a_0 = 1$$

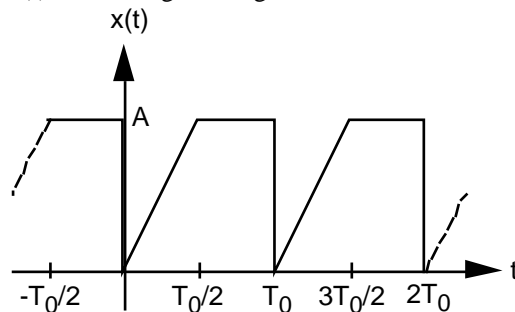
$$a_k = \frac{2}{k} \quad (k = 1, 5, 9, \dots)$$

$$a_k = -\frac{2}{k} \quad (k = 3, 7, 11, \dots)$$

$$0 \quad (k \text{ gerade})$$

$$b_k = 0$$

- b) $x(t)$ aus Übung 5, Aufgabe 2:



$$a_0 = \frac{3A}{2}$$

$$a_k = -\frac{2A}{k^2} \quad (k \text{ ungerade})$$

$$0 \quad (k \text{ gerade})$$

$$b_k = -\frac{A}{k}$$

2. Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) einer periodischen, reellen Funktion $x(t)$ die folgenden Symmetrie-Eigenschaften besitzen:

- a) $x(t)$ gerade $c_k \in \mathbb{R}$
 $x(t)$ ungerade c_k rein imaginär

Hinweise:

- Gehen Sie von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").
- Berücksichtigen Sie die Eigenschaften der reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$) einer geraden bzw. ungeraden Funktion.

- b) * $c_{-k} = c_k^*$

Hinweis:

- Gehen Sie von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").

- c) $|c_{-k}| = |c_k|$
 $\arg(c_{-k}) = -\arg(c_k)$

Hinweis:

- Gehen Sie von der in b) genannten Symmetrie-Eigenschaft aus.

Lösungen

1. a) i) $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k} & (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{1}{k} & (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j \omega t} + \frac{1}{2} e^{-j \omega t} - \frac{1}{3} e^{j 3 \omega t} - \frac{1}{3} e^{-j 3 \omega t} + \frac{1}{5} e^{j 5 \omega t} + \frac{1}{5} e^{-j 5 \omega t} + \dots$
- b) i) $c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k=0) \\ -\frac{A}{k^2} \frac{1}{2} + j \frac{A}{2k} & (k \text{ ungerade}) \\ j \frac{A}{2k} & (k \text{ gerade } k \neq 0) \end{cases}$
- ii) siehe i)
- iii) $x(t) = \frac{3A}{4} + \left(-\frac{A}{2} + j \frac{A}{2}\right) e^{j \omega t} + \left(-\frac{A}{2} - j \frac{A}{2}\right) e^{-j \omega t} + j \frac{A}{4} e^{j 2 \omega t} - j \frac{A}{4} e^{-j 2 \omega t} + \left(-\frac{A}{9} \frac{1}{2} + j \frac{A}{6}\right) e^{j 3 \omega t} + \left(-\frac{A}{9} \frac{1}{2} - j \frac{A}{6}\right) e^{-j 3 \omega t} + j \frac{A}{8} e^{j 4 \omega t} - j \frac{A}{8} e^{-j 4 \omega t} + \dots$
2. a) x(t) gerade $b_k = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$
 $c_k \in \mathbb{R}$
- x(t) ungerade $a_0 = 0 \quad a_k = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$
 c_k rein imaginär
- b) * ...
- c) ...

Integraltablelle

$$e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

$$x \cdot e^{ax} dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right) e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$