

## Übung 6

### Reelle Fourier-Reihe Konstanter Anteil, Spezielle Funktionen, Linearität

PUZZLE
--------

#### Themen

- 1 **Konstanter Anteil**
- 2 **Gerade Funktion, Ungerade Funktion**
- 3 **Konstante Funktion, Trigonometrische Funktion**
- 4 **Linearität**

#### Lernziele

- 1 **Konstanter Anteil**
  - verstehen, dass der konstante Anteil in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion der zeitliche Mittelwert der Funktion über eine Grundperiode ist.
  - verstehen, dass sich in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion nur der konstante Anteil ändert, wenn man die Funktion mit einer Konstanten addiert.
- 2 **Gerade Funktion, Ungerade Funktion**
  - verstehen, was eine gerade, ungerade Funktion ist.
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion eine reine Cosinus-Reihe ist.
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer ungeraden periodischen Funktion eine reine Sinus-Reihe ohne konstanten Anteil ist.
- 3 **Konstante Funktion, Trigonometrische Funktion**
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer konstanten Funktion weder Cosinus- noch Sinus-Glieder enthält sondern lediglich einen konstanten Anteil.
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Cosinus-Funktion ein einziges Cosinus-Glied enthält.
  - verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Sinus-Funktion ein einziges Sinus-Glied enthält.
- 4 **Linearität**
  - verstehen, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion aus den reellen Fourier-Koeffizienten von Teilfunktionen zusammensetzen.

## Aufgaben

### 1 Konstanter Anteil

#### Einzelstudium

Die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion besteht aus dem konstanten Anteil  $a_0/2$  und aus Cosinus- und Sinus-Gliedern.

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden folgenden Aussagen über den konstanten Anteil wahr sind:

- (1) Der konstante Anteil  $a_0/2$  ist gleich dem zeitlichen Mittelwert der Funktion  $x(t)$  über eine Grundperiode  $T_0$ .
- (2) Addiert man die Funktion  $x(t)$  mit einer Konstanten, so ändert sich in der reellen Fourier-Reihe von  $x(t)$  nur der konstante Anteil  $a_0/2$ . Die Cosinus- und Sinus-Glieder bzw. die Fourier-Koeffizienten  $a_k$  ( $k \neq 0$ ) und  $b_k$  ( $k \neq 0$ ) bleiben unverändert.

Hinweis:

Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \neq 0$ ),  $b_k$  ( $k \neq 0$ ).

#### Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

#### Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 1.

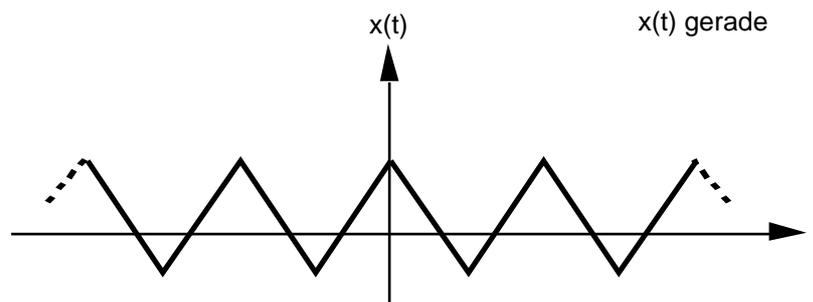
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 2, 3, 4 unterrichten.

### 2 Gerade Funktion, Ungerade Funktion

#### Einzelstudium

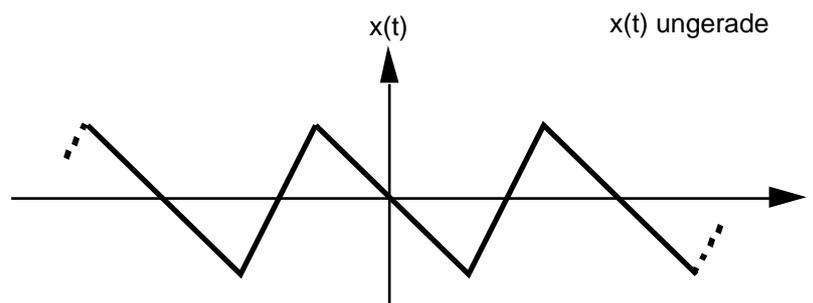
Eine Funktion  $x(t)$  nennt man eine **gerade** Funktion, falls

- der Graf von  $x(t)$  achsensymmetrisch zur Ordinate ("y-Achse") ist.
- für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:  $x(-t) = x(t)$



Eine Funktion  $x(t)$  nennt man eine **ungerade** Funktion, falls

- der Graf von  $x(t)$  punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
- für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:  $x(-t) = -x(t)$



Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer periodischen, geraden bzw. ungeraden Funktion  $x(t)$  wahr sind:

- (1)  $x(t)$  **gerade** Die Fourier-Koeffizienten  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sind alle gleich Null, d.h. die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nebst dem konstanten Anteil nur **Cosinus**-Glieder, jedoch keine Sinus-Glieder:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t)$$

- (2)  $x(t)$  **ungerade** Die Fourier-Koeffizienten  $a_0$  und  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) sind alle gleich Null, d.h. die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nur **Sinus**-Glieder, jedoch weder einen konstanten Anteil noch Cosinus-Glieder:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)$$

Hinweise:

- Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).
- Legen Sie die Integrationsgrenzen symmetrisch zu  $t = 0$ , also  $-T_0/2$  und  $T_0/2$ .
- Überlegen Sie sich, dass ein Integral mit symmetrischen Integrationsgrenzen (z.B.  $-T_0/2$  und  $T_0/2$ ) gleich Null ist, falls der Integrand eine ungerade Funktion ist.

*Expertenrunde*

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

*Unterrichtsrunde*

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 2.

Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 3, 4 unterrichten.

### 3 Konstante Funktion, Trigonometrische Funktion

*Einzelstudium*

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die drei folgenden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer konstanten bzw. einer trigonometrischen Funktion  $x(t)$  wahr sind:

- (1)  $x(t) = c = \text{konst.}$  Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält weder Cosinus- noch Sinus-Glieder sondern lediglich einen konstanten Anteil:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \quad \text{mit } a_0 = 2c$$

Bemerkung:

Eine konstante Funktion kann als eine periodische Funktion mit beliebiger Grundperiode aufgefasst werden.

- (2)  $x(t) = A \cdot \cos(at)$  Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nur ein einziges Cosinus-Glied:

$$x(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit } a_1 = A \text{ und } \omega_0 = a$$

- (3)  $x(t) = A \cdot \sin(at)$  Die reelle Fourier-Reihe von  $x(t)$  enthält nur ein einziges Sinus-Glied:

$$x(t) = b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) \quad \text{mit } b_1 = A \text{ und } \omega_0 = a$$

Hinweise:

- Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).
- Betrachten Sie die Werte der Integrale in der Übung 4, Aufgabe 4.

### Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

### Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 3.

Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 4 unterrichten.

## 4 Linearität

### Einzelstudium

Eine periodische Funktion  $x(t)$  sei darstellbar als Linearkombination zweier periodischer Teilfunktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ :

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

Mit  $a_0, a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) seien die reellen Fourier-Koeffizienten von  $x(t)$  bezeichnet.

Mit  $a_{0,1}, a_{k,1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b_{k,1}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) seien die reellen Fourier-Koeffizienten von  $x_1(t)$  bezeichnet.

Mit  $a_{0,2}, a_{k,2}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) und  $b_{k,2}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) seien die reellen Fourier-Koeffizienten von  $x_2(t)$  bezeichnet.

Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden drei Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten von  $x(t)$ ,  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  wahr sind oder nicht:

- (1)  $a_0 = \alpha_1 a_{0,1} + \alpha_2 a_{0,2}$
- (2)  $a_k = \alpha_1 a_{k,1} + \alpha_2 a_{k,2} \quad (k \in \mathbb{N})$
- (3)  $b_k = \alpha_1 b_{k,1} + \alpha_2 b_{k,2} \quad (k \in \mathbb{N})$

Die drei Aussagen könnte man etwa wie folgt in einem deutschen Satz zusammenfassen:

*Die Fourier-Koeffizienten der Funktion  $x(t)$  setzen sich "auf gleiche Art und Weise" aus den Fourier-Koeffizienten der Teilfunktionen zusammen wie sich die Funktion selber aus den Teilfunktionen zusammensetzt.*

- a) Nehmen Sie an, dass  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  die **gleiche** Grundperiode besitzen.
- b) \* Worin liegt die Problematik, falls  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  **unterschiedliche** Grundperioden besitzen?

### Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

### Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 4.

Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 3 unterrichten.