

## Parseval'sche Beziehung

$x(t)$  aperiodisch

**Fourier-Integral** 
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

**Fourier-Transformierte** 
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

<b>Parseval'sche Beziehung</b>	$\int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  X(\omega) ^2 d\omega$
--------------------------------	--

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot (x(t))^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot e^{-j\omega t} d\omega dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (X(\omega))^* \cdot x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (X(\omega))^* \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(\omega))^* \cdot X(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$	=	"Signal", Elektrische Ladungsstromstärke $I_Q$ , Elektrische Spannung $U$
	$ x(t) ^2$		Leistung zum Zeitpunkt $t$ , wenn das Signal ein Widerstandselement durchläuft $\left( P_{el} = U \cdot I_Q = R \cdot I_Q^2 = \frac{1}{R} U^2 \right)$
	$ x(t) ^2 dt$		Umgesetzte Energie im Zeitintervall $[t, t+dt]$
	$\int  x(t) ^2 dt$		<b>Gesamte</b> umgesetzte <b>Energie</b>
	$= \frac{1}{2} \int  X(\omega) ^2 d\omega$		
	$ X(\omega) ^2 d\omega$		Umgesetzte Energie bezüglich des Frequenzintervalls $[\omega, \omega + d\omega]$
	$ X(\omega) ^2$		<b>Dichte</b> der umgesetzten <b>Energie</b> bezüglich der Frequenz

$|X(\omega)|^2$  wird als **Energiedichtespektrum** bezeichnet.

