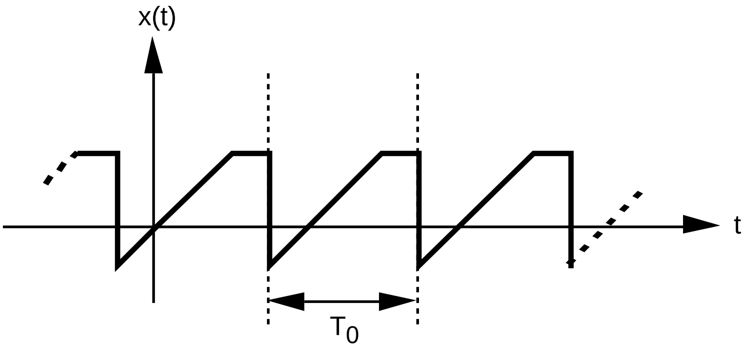
Reelle Fourier-Reihe

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode T_0



Die trigonometrische Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **reelle Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Die Konstanten a_0, a_k $(k \in \mathbb{N})$, b_k $(k \in \mathbb{N})$ sind die **reellen Fourier-Koeffizienten**.

Die Fourier-Reihen-Darstellung erlaubt es, $x(t)$ in einen konstanten Anteil, in eine Grundschwingung und in Oberschwingungen aufzuteilen:

$x(t) =$	$\frac{a_0}{2}$	Konstanter Anteil
	$+\ a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	1. Harmonische, Grundschwingung
	$+\ a_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2\omega_0 t)$	2. Harmonische, 1. Oberschwingung
	$+\ a_3 \cdot \cos(3\omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3\omega_0 t)$	3. Harmonische, 2. Oberschwingung
	$+\ \ldots$	
	$+\ a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)$	n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung
	$+\ \ldots$	

Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

a_0

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \Big| \int_0^{T_0} \ldots \, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t)\, dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \right) dt$$

$$= \ldots = \frac{a_0}{2} \cdot T_0 \qquad \Big| : \frac{T_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

a_k (k N)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \Big| \cdot \cos(m\omega_0 t) \text{ , m N}$$

$$\Big| \int_0^{T_0} \ldots \, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(m\omega_0 t) \, dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \right) \cdot \cos(m\omega_0 t) \, dt$$

$$= \ldots = a_m \cdot \frac{T_0}{2} \qquad \Big| : \frac{T_0}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) \, dt$$

b_k (k N)

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \Big| \cdot \sin(m\omega_0 t) \text{ , m N}$$

$$\Big| \int_0^{T_0} \ldots \, dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(m\omega_0 t) \, dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \right) \cdot \sin(m\omega_0 t) \, dt$$

$$= \ldots = b_m \cdot \frac{T_0}{2} \qquad \Big| : \frac{T_0}{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) \, dt$$

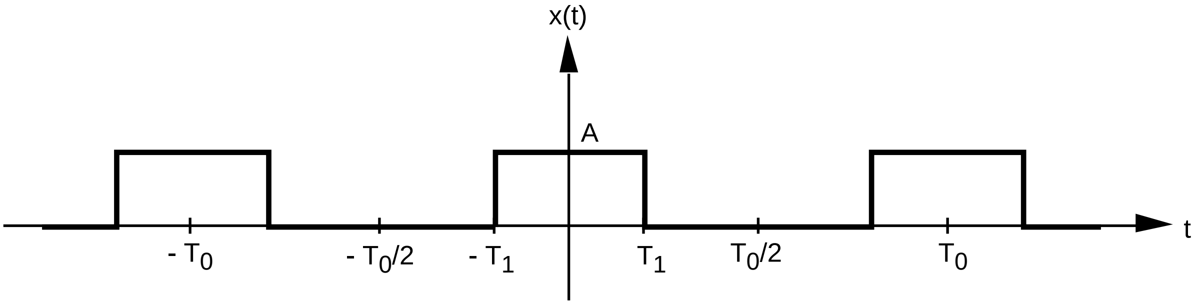
Da die Integranden in den Integralen für a_0, a_k (k N), b_k (k N) die Periode T_0 besitzen, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \, dt \\ a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) \, dt \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) \, dt \end{aligned}}$$

Beispiel

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t|<T_1) \\ 0 & \left(T_1<|t|<\frac{T_0}{2}\right) \end{cases}$$

$x(t+T_0) = x(t)$



$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\, dt = \ldots = \frac{4AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\, dt = \ldots = \frac{2A\cdot\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

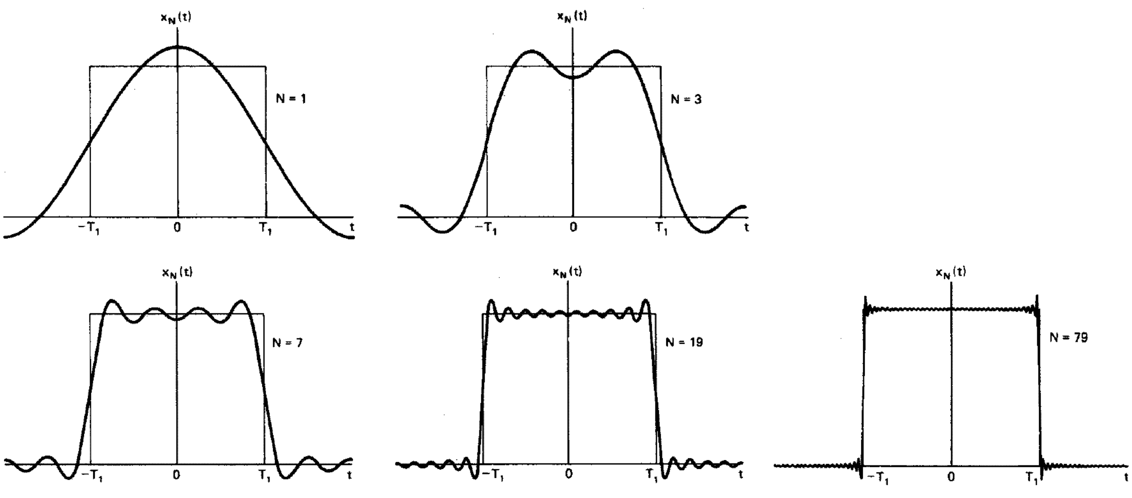
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt = \ldots = 0$$

$$x(t) = \frac{2AT_1}{T_0} + \frac{2A\cdot\sin(\omega_0 T_1)}{\pi}\cos(\omega_0 t) + \frac{2A\cdot\sin(2\omega_0 T_1)}{2\pi}\cos(2\omega_0 t) + \frac{2A\cdot\sin(3\omega_0 T_1)}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \ldots$$

Endliche Fourier-Reihe als Näherungsfunktion

$$x_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k\cdot\cos(k\omega_0 t) + b_k\cdot\sin(k\omega_0 t)\right)$$

x(t) wie im obigen Beispiel



Betrags-/Phasen-Darstellung

Die reelle Fourier-Reihe kann sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung geschrieben werden:

Sinus-/Cosinus-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad (a_0, a_k, b_k \in R)$$

Betrags-/Phasen-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \qquad (a_0 \in R,\ A_k \geq 0,\ 0 \leq \phi_k < 2\pi \text{ oder } -\pi < \phi_k \leq \pi)$$

oder

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k\omega_0 t + \varphi_k) \qquad (a_0 \in R,\ B_k \geq 0,\ 0 \leq \varphi_k < 2\pi \text{ oder } -\pi < \varphi_k \leq \pi)$$

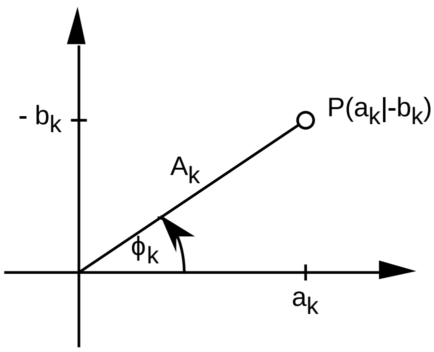
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten A_k und ϕ_k können a_k und $-b_k$ als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) = A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$

...

$a_k = A_k \cdot \cos(\phi_k)$

$b_k = - A_k \cdot \sin(\phi_k)$



$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\phi_k = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & (a_k > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (a_k = 0 \quad b_k > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (a_k = 0 \quad b_k < 0) \\ -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & (a_k < 0) \end{cases}$$

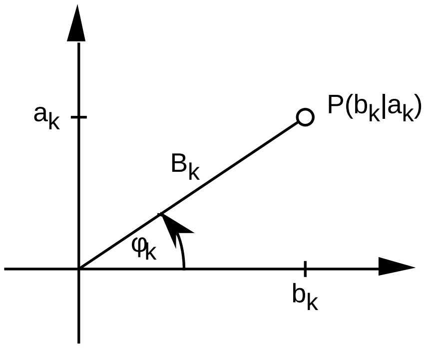
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten B_k und φ_k können b_k und a_k als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) = B_k \cdot \sin(k\omega_0 t + \varphi_k)$

...

$a_k = B_k \cdot \sin(\varphi_k)$

$b_k = B_k \cdot \cos(\varphi_k)$



$$B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \begin{cases} \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right) & (b_k > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (b_k = 0 \quad a_k > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (b_k = 0 \quad a_k < 0) \\ \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right) + \pi & (b_k < 0) \end{cases}$$